

Zentrum für
Luft- und
Raumfahrttechnik

Technische Universität
Braunschweig



**Aeromechanische Stabilitätsuntersuchungen
zur Rotorstillsetzung
bei Verwandlungsdrehflüglern**

U. Arnold

Institut für Flugmechanik

ZLR-Forschungsbericht 94-03

Zentrum für Luft- und Raumfahrttechnik

Technische Universität
Braunschweig



Aeromechanische Stabilitätsuntersuchungen zur Rotorstillsetzung bei Verwandlungsdrehflüglern *

U. Arnold

Institut für Flugmechanik

ZLR-Forschungsbericht 94-03

* Diese Arbeit erscheint gleichzeitig als von der Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik der Universität Braunschweig (TU) zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.

Herausgeber der ZLR-Forschungsberichte:

Zentrum für Luft- und Raumfahrttechnik
Technische Universität Braunschweig
33106 Braunschweig

Vertrieb des vorliegenden ZLR-Forschungsberichtes:

Institut für Flugmechanik
Technische Universität Braunschweig
Schleinitzstr. 20; 38106 Braunschweig
Tel.: (0531)391-7131; FAX: (0531)391-7132

© 1994

Institut für Flugmechanik

Mai 1994

3-928628-16-X

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Aeromechanische Stabilitätsuntersuchungen zur Rotorstillsetzung bei Verwandlungsdrehflüglern

Von der Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Uwe Arnold
aus Berlin

Eingereicht am:	20. Oktober 1993
Mündliche Prüfung:	21. Dezember 1993
Berichterstatter:	Prof. Dipl.-Math. G. Reichert
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. habil. D. Ottl

1994

Übersicht

Hinter dem Konzept der Stopp-Rotor-Verwandlungsdrehflügel steht die Idee, die Fähigkeit von Hubschraubern senkrecht zu starten und zu landen mit dem Vorteil der deutlich höheren Reisegeschwindigkeit von Flächenflugzeugen zu verbinden. Dazu wurden Fluggeräte vorgeschlagen, bei denen die für den Schwebeflug optimierten Rotoren nach dem Start stillgesetzt und strömungsgünstig verstaut werden, während der erforderliche Auftrieb durch einen Tragflügel erzeugt wird.

Gegenstand dieser Arbeit sind Untersuchungen zur aeromechanischen Stabilität der Rotorblattbewegungen während der Stillsetzung eines derartigen Stopp-Rotors. Die Betrachtungen beziehen sich auf den Betriebsbereich zwischen Nenndrehzahl und Rotorstillstand, wobei der Rotor zuvor vollständig von seiner Auftriebsfunktion entlastet wurde. Durch die im Vergleich zum konventionellen Hubschrauber niedrigen Rotordrehzahlen bei gleichzeitig hohen Fluggeschwindigkeiten ergeben sich eine Reihe von dynamischen Problemen bezüglich der erzwungenen Schwingungen und der Stabilität der Blattbewegungen.

Im ersten Teil der Arbeit wird dargestellt, wie die für Hubschrauber entwickelten mathematischen Modelle und Methoden in Hinblick auf die besonderen Betriebsbedingungen des Stopp-Rotors zu modifizieren sind. Es zeigt sich, daß insbesondere die Rückanströmung der Blätter bei großen Fortschrittsgraden berücksichtigt werden muß. Aufbauend auf der Blattelemententheorie wird eine kompakte Formulierung vorgestellt, mit der sich die entscheidenden physikalischen Effekte analytisch beschreiben lassen. Dann wird auf verschiedene Verfahren zur Behandlung von Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten eingegangen und die Anwendung der FLOQUET-Theorie auf nichtlineare Gleichungen erläutert.

Die Untersuchungen zur Stillsetzung betreffen hauptsächlich die Schlagbewegung eines isolierten Blattes. Es werden periodische Lösungen sowie Ergebnisse zur statischen und dynamischen Stabilität für lineare und nichtlineare Blattmodelle dargestellt. Außerdem werden gekoppelte Bewegungen betrachtet, wie sie sich bei zusätzlicher Berücksichtigung von Torsions- und Schwenkfreiheitsgrad ergeben.

Zu technischen Problemen kann vor allem das Auftreten großer Antwortamplituden führen. Als entscheidender konstruktiver Parameter erweist sich die im Schlagfreiheitsgrad wirksame Blattanschlußsteifigkeit. Rechnungen zur aktiven Steuerung der Blattbewegungen zeigen abschließend, daß schon mit verhältnismäßig einfachen Regelungskonzepten eine deutliche Verbesserung in den Stabilitäts- und Antworteigenschaften erzielt werden kann.

Abstract

The concept of the stopped rotor aircraft is intended to combine the helicopter's VTOL ability with the superior high speed performance of a fixed wing aircraft. For this purpose, several configurations have been proposed that feature stoppable and stowable rotors. After take-off and acceleration to the necessary transition speed, such aircraft convert to a conventional type of airplane which obtains all its lift from a fixed wing.

This thesis describes investigations on the aeromechanical stability of the rotor blade motions during the start/stop procedure. The work covers the operating condition from nominal rotor speed to complete stop. Although the rotor is assumed to be unloaded when the shut down is initiated, the slow rotor rotation at high forward speed can cause dynamic problems such as degraded stability and high blade motion response amplitudes.

In the first part it is stated, how the mathematical models typically applied to the classical helicopter need to be extended to consider the different working conditions of a stopped rotor. The modeling of reversed flow turned out to be an important issue at high advance ratios. Based on blade element theory, a compact formalism is introduced that analytically incorporates all important effects. Various mathematical methods applicable to differential equations with periodic coefficients are presented. Further, the treatment of nonlinear equations by an extended version of FLOQUET theory is explained.

The investigation of stopped rotor dynamics mainly refer to the flapping motion of an isolated blade. Typical periodic solutions as well as results from the divergence and stability analyses are presented. Additionally, the coupled motions resulting from the inclusion of the torsional and lagging degrees of freedom are discussed.

Technical problems mainly arise from high response amplitudes. Far more than other parameters, the effective stiffness at the equivalent flap hinge was found to affect the stopped rotor behavior. Finally, various calculations exploring the possible benefits of different active control schemes show that even very simple control concepts can successfully augment stability and reduce the undesired response amplitudes.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>Vorwort</u>	x
<u>Bezeichnungen</u>	xi
<u>1 Einleitung</u>	1
1.1 Konzept des Verwandlungsdrehflüglers mit horizontal stillsetzbaren Rotoren	3
1.2 Stand der Forschung	6
1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit	9
<u>2 Die mathematische Modellierung des Stopp-Rotors</u>	13
2.1 Auslegungsparameter des Fluggerätes	13
2.2 Der Stillsetzungs- und Anfahrvorgang	14
2.3 Modellierung der elastischen Blatteigenschaften	18
2.3.1 Beschreibung der Biegeeigenformen durch ein Gliederkettenmodell ..	19
2.3.2 Das Blattanschlußersatzmodell	21
2.4 Berechnung der Massenkraftmomente am Blatt	26
2.5 Modellierung der Luftkraftmomente am Blatt	28
2.5.1 Blattelemententheorie mit linearer Aerodynamik	29
2.5.2 Analytische Berücksichtigung der Rückanströmung	31
2.5.3 Nichtlineares, numerisches Aerodynamikmodell zur Berücksichtigung von Rückanströmung und Abreißen	34
<u>3 Verfahren zur Stabilitätsanalyse von parametererregten Systemen</u>	37
3.1 Die FLOQUET-Theorie für lineare Gleichungen	38
3.2 Die Behandlung nichtlinearer Gleichungen	43
3.2.1 Die Bestimmung der partikulären Lösung	45
3.2.2 Untersuchung der Stabilität durch Linearisierung	49
3.2.3 Numerische Simulation	51
3.2.4 Das modifizierte FLOQUET-Verfahren	53
3.2.5 Betrachtungen zur numerischen Genauigkeit der verwendeten Algorithmen	55

4 Stabilität und Antwortverhalten der Schlagbewegung	61
4.1 Die Schlagdifferentialgleichung	62
4.2 Statische Stabilität	65
4.3 Dynamische Stabilität der Schlagbewegung bei konstanter Rotordrehzahl	67
4.3.1 Prinzipielle Überlegungen anhand der MATHIEUschen Differentialgleichung und der STRUTTschen Karte	68
4.3.2 Stabilitätsrechnungen für die lineare Schlagdifferentialgleichung	76
4.3.2.1 Einfluß der Rückanströmung	78
4.3.2.2 Einfluß der Schlageigenform	85
4.3.2.3 Variation konstruktiver Parameter	86
4.3.3 Stabilitätsrechnungen bei nichtlinearer Aerodynamik	90
4.4 Berücksichtigung der Störfunktion	93
4.4.1 Die partikuläre Lösung der MATHIEUschen Differentialgleichung	94
4.4.2 Das stationäre Antwortverhalten der Schlagbewegung	98
4.4.3 Einfluß der partikulären Lösung auf die Stabilität	103
4.5 Untersuchungen bei variabler Rotordrehzahl	108
5 Die Berücksichtigung weiterer Blattfreiheitsgrade	113
5.1 Die Torsionsbewegung	113
5.1.1 Erweiterung des aerodynamischen Modells um Torsions-Luftkraftmomente	114
5.1.2 Das gekoppelte Schlag-/Torsions-Differentialgleichungssystem	118
5.1.3 Die statische Schlag-/Torsions-Divergenz	121
5.1.4 Klassisches Rotorblattflattern im Schwebeflug	128
5.1.5 Die dynamische Stabilität des isolierten Torsionsfreiheitsgrades	131
5.1.6 Untersuchungen zur Stabilität der gekoppelten Bewegung	133
5.1.7 Selbsterregung und Grenzzykel	138
5.2 Die Schwenkbewegung	140
5.2.1 Erweiterung des aerodynamischen Modells um Schwenk-Luftkraftmomente	141
5.2.2 Das nichtlinear gekoppelte Schlag-/Schwenk-Differentialgleichungssystem	143
5.2.3 Die statische Stabilität	146
5.2.4 Die dynamische Stabilität des isolierten Schwenkfreiheitsgrades	147
5.2.5 Die partikuläre Lösung	149
5.2.6 Untersuchungen zur Stabilität der gekoppelten Bewegung	150
5.3 Numerische Simulationen und Stabilitätsrechnungen mit einem nichtlinearen Schlag-/Schwenk-/Torsionsmodell	155

<u>6 Steuerung und Regelung der Rotorstillsetzung</u>	159
6.1 Flugmechanische Randbedingungen während der Rotorstillsetzung	159
6.2 Die erforderlichen Steuereingaben zum Austrimmen des Flugzustandes	163
6.3 Künstliche Stabilisierung der Schlagbewegung durch aktive Steuerung	166
6.3.1 Die möglichen Regelungskonzepte	167
6.3.2 Beispielrechnungen für die Anwendung der Einzelblattsteuerung (Individual Blade Control)	169
6.3.2.1 Künstliche Stabilisierung	170
6.3.2.2 Schubregelung und Amplitudenbegrenzung	177
<u>7 Zusammenfassung</u>	185
<u>8 Literatur</u>	189
<u>A Anhang</u>	197
A.1 Referenzdaten	197
A.2 Koordinatensysteme	198
A.3 Transformationen	199
A.4 Blattmasse und Trägheitsmomente	200
A.5 Gleichungen der isolierten Schlagbewegung	201
A.6 Gleichungen der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegung	203
A.7 Gleichungen der gekoppelten Schlag-/Schwenkbewegung	207
A.8 Stabilitätsuntersuchung konstanter und periodischer Systeme	211
A.9 Profilbeiwerte für das numerische Aerodynamikmodell	212
A.10 Das Rechenprogramm ARNCON	213

Vorwort

Diese Dissertationsschrift beschreibt Ergebnisse meiner Arbeit am Institut für Flugmechanik der Technischen Universität Braunschweig. An diesem Institut war ich von 1988 bis 1993 als wissenschaftlicher Mitarbeiter beschäftigt.

Mein besonderer Dank gilt dem Institutsleiter Herrn Prof. Dipl.-Math. Günther Reichert, der diese Arbeit nicht nur angeregt, sondern über den gesamten Zeitraum gefördert und in vielfacher Weise unterstützt hat. Durch ihn wurden mir, auch im Zusammenhang mit anderen Arbeitsschwerpunkten, entscheidende Entwicklungsmöglichkeiten geboten.

Zu danken habe ich ferner Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Ottl, der diese Arbeit mit Interesse und Energie durchgesehen, viele wertvolle Anregungen beigetragen und das Zweitgutachten erstellt hat. Für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes danke ich schließlich Herrn Prof. Dr.-Ing. Horst Kossira.

Anteil am Gelingen meiner Arbeit hatten auch die guten Rahmenbedingungen am Institut für Flugmechanik. Viele anregende Diskussionen mit meinen Kollegen haben den Einblick in die verschiedenen Teilgebiete der Hubschraubertechnik vertieft. Eine besonders enge Zusammenarbeit entwickelte sich dabei mit Herrn Dipl.-Ing. Norbert Tränapp.

Besonderer Dank gebührt der technischen Zeichnerin Frau Inge Kutz, die mit großer Geduld und Sorgfalt alle Bilder dieser Arbeit erstellt bzw. bearbeitet hat.

Bezeichnungen

Lateinische Buchstaben

a	(fiktiver) Schlag-/Schwenkgelenkabstand
a_n	Schlagkoeffizient (cos-Term)
a_{Schall}	Schallgeschwindigkeit
A	aerodynamischer Blattanfang (dim.los, bezogen auf R)
A	Auftrieb (der Flügel-Rumpf-Kombination)
$A, A_r, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$	Antwortamplitude, Betrag der FOURIER-Koeffizienten der partikulären Lösung
$\underline{A}, \underline{A}(t)$	konstante, periodische Systemmatrix
b_n	Schlagkoeffizient (sin-Term)
B	aerodynamisches Blattende (dim.los, bezogen auf R)
c_β, c_Θ, c_ξ	(fiktive) Schlag-, Torsions-, Schwenkfedersteifigkeit (rückstellend positiv)
$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$	FOURIER-Koeffizient
C	THEODORSEN-Funktion
$C_a = \frac{dA}{\frac{\rho}{2} V_{res}^2 l_{Bl} d\tau}$	Auftriebsprofilbeiwert, Definition für C_w, C_z etc. analog
$C_A = \frac{A}{\frac{\rho}{2} V_{res}^2 S_{Fl}}$	Auftriebsbeiwert der Flügel-Rumpf-Kombination, C_w analog
$C_{aa} = dC_a/d\alpha_{eff}$	Auftriebsanstieg des Blattprofils
$C_{A\alpha}$	Auftriebsanstieg der Flügel-Rumpf-Kombination
C_{w0}	Nullwiderstand des Blattprofils
C_{w0}	Nullwiderstand der Flügel-Rumpf-Kombination
$C_n = D_n - \frac{a}{R} D_{n-1}$	Abkürzung, verwendet in Schlagdifferentialgleichung
C	Rotormittelpunkt
$D, D(\psi)$	Dämpfung(-skoeffizient, dimensionslos, bezogen auf Ω !)
$D^* = \frac{-\operatorname{Re}(\lambda)}{\omega_0}$	Dämpfungsgrad (dimensionslos, bezogen auf ω_0 !)
$D_0, D_{0\xi}$	mechanische Dämpfung im Schlag-, Schwenkfreiheitsgrad
$D_n = \int_A^B x^{n-1} dx$	Blattintegral
$D_n^R = \int_A^B x^{n-2} x + \mu \sin \psi dx$	Blattintegral bei Berücksichtigung der Rückanströmung
$D(\psi)$	periodischer Dämpfungskoeffizient

\underline{D}	Dämpfungsmatrix
$\underline{e}^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$	Einheitsvektor (2. Spalte der Einheitsmatrix)
E	Torsionsgelenk (elastische Achse)
$E(\psi)$	periodischer Steuergrößenkoeffizient der rechten Seite
$\hat{E}_2(\psi)$	rechteckförmige Näherung der Steuercharakteristik
\underline{E}	Steuermatrix
F_0	Gewichtsterm der rechten Seite
g	Erdbeschleunigung
G_β, G_p	Regler-Verstärkungsfaktoren
$G_n = 4\bar{y}D_n^R - D_n$	Abkürzung, verwendet in Torsions-Differentialgleichung
H	Flughöhe
$H = 4\bar{y}^2 + \bar{y}$	Profilnickdämpfungsfunktion
\underline{I}	Einheitsmatrix
J	Blatträgheitsmoment (Definitionen siehe Anhang A.2)
$k_z = \frac{-Z_{Ro}}{\frac{\rho}{2}\pi\Omega^2 R^4}$	Schubbeiwert
$K(\psi)$	periodischer Steifigkeitskoeffizient
K_0	Mittelwert der Steifigkeit in der MATHIEUschen DGL
$K_0 = \frac{J_\beta^{CP} + c_\beta/\Omega^2}{J^{PP}}$	konstanter Steifigkeitsterm (der Schlag-DGL)
K_C	Amplitude der Steifigkeit in der MATHIEUschen DGL
\underline{K}	Steifigkeitsmatrix
l_{Bl}	Blatttiefe
L	Blatttorsionsmoment
L_1, L_2	Luftangriffspunkte (bei $l_{Bl}/4, 3l_{Bl}/4$)
m	Gesamtmasse des Fluggerätes
\bar{m}	Blattmassenbelegung (Masse pro Länge)
m_{Bl}	Blattmasse
M	Schlagmoment
\underline{M}	Transformationsmatrix
$Ma = \frac{v}{a_{Schall}}$	MACH-Zahl
n_{Bl}	Anzahl der Rotorblätter
N	Schwenkmoment

P	Schlaggelenk
P	Leistung
\underline{P}	Matrix der Eigenvektoren
Q	Rotordrehmoment
Q	Schwenkgelenk
$\underline{Q}, \underline{\underline{Q}}$	Vektor, Matrix der Corioliskopplungen
r	radiale Blattkoordinate (Ursprung im Rotormittelpunkt)
R	Rotorradius
S	Blattprofilschwerpunkt
S	statisches Blattmassenmoment (Def. siehe Anhang A.2)
S_{Fl}	Flügelfläche
t	Zeit
$T = 2\pi/\Omega$	(Erreger-)Periode, Dauer eines Rotorumlafs
u, u_q	Amplitude der Störfunktion
v_t, v_n	tangentiale, normale Geschwindigkeitskomp. am Blatt
V	Fluggeschwindigkeit
w_i	induzierter Rotorabwind
W	Widerstand der Flügel-Rumpf-Kombination
$x = r/R$	radiale Blattkoordinate (dimensionslos)
\underline{x}	Zustandsvektor
X	Längskraft (in flugzeugfester x-Richtung)
y	Blatttiefenkoordinate (0 in E)
y_{L1}, y_{L2}	Abstand der Luftangriffspunkte L_1, L_2 von E
y_S	Abstand des Profilschwerpunktes S von E
$\bar{y} = \frac{y_{L1}}{l_{Bl}} + \frac{1}{4}$	relative Lage von E bezüglich $l/2$ (dimensionslos)
Y_{Ro}	Rotorseitenkraft (in flugzeugfester y-Richtung)
Z_{Ro}	Rotorschub (parallel zur Rotorachse, nach unten pos.)
$\underline{\underline{Z}}^{-1}(t)$	Koordinatentransformation auf das zugeh. System mit konstanten Koeffizienten

Griechische Buchstaben

α_{eff}	örtlicher effektiver Anstellwinkel am Profilschnitt
α_{Fl}	effektiver Anstellwinkel des Flügels

α_{Ro}	Anstell-/Einstellwinkel der Rotorkreisscheibe
β	Schlagwinkel (pos. nach oben)
$\gamma, \gamma_{\beta} = \frac{\frac{\rho}{2} C_{aa} I_{Bl} R^4}{J^{PP}}$	Blattmassenkonstante (der Schlagbewegung)
$\gamma_{\Theta} = \frac{\frac{\rho}{8} C_{aa} I_{Bl}^2 R^3}{J^{EE}}$	Blattmassenkonstante der Torsionsbewegung
$\gamma_{\zeta} = \frac{\frac{\rho}{2} C_{w0} I_{Bl} R^4}{J^{PP}}$	Blattmassenkonstante der Schwenkbewegung
$\delta = \frac{V \sin \alpha_{Ro} - w_i}{\Omega R}$	Durchflußgrad
δ_3	Winkel der Schlagwinkelrücksteuerung
ε	Anfangsstörung beim mod. FLOQUET-Verfahren
ζ	Schwenkwinkel (pos. gegen die Rotordrehung)
$\vartheta = \vartheta_{St} + \vartheta_{\zeta}$ $\vartheta^* = \vartheta_{St} + \vartheta_{\zeta} + \Theta$	effektiver Einstellwinkel des örtlichen Profilschnitts
ϑ_1	Blattverwindung (Winkel pro Blattkoordinate x)
ϑ_{St}	Blattsteuerwinkel (eingesteuert an der Blattwurzel)
ϑ_0	Kollektivwinkel (konst. Anteil des Blattsteuerwinkels)
Θ	Blatttorsionswinkel (pos. für Profilnase nach oben)
Θ_{Fi}	Einstellwinkel des Flügels gegenüber der Fluggeschw.
$\lambda = \operatorname{Re}(\lambda) + j \operatorname{Im}(\lambda)$	Eigenwert, Lösung der charakt. Gleichung
$\frac{\lambda}{\Omega} = \frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{\Omega} + j \frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\Omega}$	Eigenwert der Blattdifferentialgleichungen (dim.los)
$\mu = \frac{V \cos \alpha_{Ro}}{\Omega R}$	Fortschrittsgrad (entsprechend μ_{nenn} für Ω_{nenn})
μ	charakteristischer Multiplikator
ρ	Luftdichte
σ	Rotormast-Einbauwinkel (pos. nach hinten geneigt)
$\varphi = \frac{v_n}{v_t}$ $\varphi^* = \arctan \frac{v_n}{v_t}$	örtlicher Anströmwinkel am Profilelement
φ	Phasenwinkel
$\underline{\Phi}(t)$	Transitionsmatrix ($\underline{\Phi}(t_0) = \underline{I}$)
$\underline{\Phi}_* = \underline{\Phi}(t_0 + T)$	Monodromiematrix
χ	Vektor der betrachteten Freiheitsgrade
ψ	Rotorumlaufwinkel (gezählt von der hinteren Blattposition, positiv linksdrehend um die z_{Ro} -Achse !)
$\underline{\Psi}$	Fundamentalmatrix
ω	Kreisfrequenz

ω_0

Eigenfrequenz (d. zugeh. ungedämpften Systems bei Vernachlässigung der Parametererregung bzw. im Vakuum)

$$\bar{\omega}_\beta^{nr} = \frac{\sqrt{c_\beta / J^{PP}}}{\Omega_{nenn}}$$

Blattanschlußsteifigkeit der Schlagbewegung (dim.los)

$$\bar{\omega}_\Theta^{nr} = \frac{\sqrt{c_\Theta / J^{SS}}}{\Omega_{nenn}}$$

Blattanschlußsteifigkeit der Torsionsbewegung (dim.los)

$$\bar{\omega}_\zeta^{nr} = \frac{\sqrt{c_\zeta / J^{PP}}}{\Omega_{nenn}}$$

Blattanschlußsteifigkeit der Schwenkbewegung (dim.los)

$$\Omega = d\psi/dt$$

Rotordrehzahl (Kreisfrequenz)

$$\Omega_{nenn}$$

Rotorenndrehzahl (im rotorgetragenen Betriebszustand)

Indizes

eff

effektiv, unter Berücksichtigung der örtlichen Bedingungen

fikt

fiktiv, nur formal verwendet

Fl

Flügel-Rumpf-Kombination

hom

homogen

n

normal, senkrecht

part

partikulär

R

unter (analytischer) Berücksichtigung der Rückanströmung

Ro

Rotor

t

tangential

TW

Triebwerk

Attribute

$$\dots' = d(\dots)/d\psi$$

erste Ableitung nach dem Umlaufwinkel

$$\dots'' = d^2(\dots)/d\psi^2$$

zweite Ableitung nach dem Umlaufwinkel

$$\dots = d(\dots)/dt$$

erste Ableitung nach der Zeit

$$\dots = d^2(\dots)/dt^2$$

zweite Ableitung nach der Zeit

$$\dots$$

dimensionslos, bezogen auf die Rotorenndrehzahl Ω_{nenn}

$$\underline{\dots}$$

Vektor

$$\underline{\underline{\dots}}$$

Matrix

1 Einleitung

Die Fähigkeit, zu schweben oder senkrecht zu starten und zu landen, kann das Einsatzspektrum von Luftfahrzeugen beträchtlich erweitern. Zum einen gibt es Aufgaben, für die anhaltendes Schweben eine notwendige Voraussetzung darstellt; zu ihnen gehören z.B. Bergungs-, Beobachtungs-, Montage- und Überwachungseinsätze. Zum anderen bieten sich sofort neue Einsatzmöglichkeiten, wenn im Flugverkehr der Aufwand für die Bodeninfrastruktur gesenkt werden könnte. Konventionelle Flugzeuge sind für Start und Landung auf großflächige Flugplätze außerhalb der Stadtzentren angewiesen, wodurch ihre Eignung für Kurzstreckeneinsätze erheblich einschränkt wird.

Für die erstgenannten Bereiche hat sich der Hubschrauber als vielseitiges und sicheres Fluggerät durchgesetzt. Wie die Strahltheorie nämlich zeigt, arbeiten Hubschrauberrotoren mit ihren niedrigen Kreisflächenbelastungen im Vergleich zu allen anderen Hubantrieben im Schwebeflug besonders effizient. Stellt man dagegen die Transportleistung in den Vordergrund, d.h. wird die Fluggeschwindigkeit zum entscheidenden Kriterium, erweist sich der Hubschrauber als weniger ökonomisch. Seine Höchstgeschwindigkeit liegt mit ca. 80 m/s weit unterhalb des bei Flächenflugzeugen üblichen Bereichs von 200...300 m/s. Bei Geschwindigkeiten über 100 m/s verschlechtern sich die Betriebsbedingungen für einen Hubschrauberrotor derart, daß eine Schuberrhöhung auch bei überproportionaler Vergrößerung der Antriebsleistung nicht mehr zu erzielen ist.

Bei anderen Antriebskonzepten wiederum liegt der Leistungsbedarf im Schwebeflug weit jenseits der für den Schnellflug erforderlichen Werte (außer bei einigen überschallschnellen Strahlensenkrechtstartern). Aber auch die hohen Strahlgeschwindigkeiten von Hubtriebwerken verursachen am Boden Probleme, die viele Vorteile des senkrechten Startens und Landens nicht wirksam werden lassen.

Bei der Entwicklung neuer senkrechtstartfähiger Luftfahrzeuge wird daher nach Konzepten gesucht, bei denen der Leistungsbedarf an den Rändern des Flugbereichs ausgewogen ist, und deren Strahlgeschwindigkeiten einen flexiblen Einsatz auch in Ballungsgebieten erlauben, siehe z.B. [4], [9], und [19]. Es liegt daher nahe zu versuchen, die guten Schwebefugleistungen von Hubschraubern mit den Schnellflugeigenschaften von Flächen-

flugzeugen zu verbinden. In [21] werden einige dieser sogenannten Compound- (Kombinations-) und Composite- (Verwandlungs-) Drehflüglerkonzepte verglichen. Die besondere Eigenschaft dieser Fluggeräte, senkrecht starten und landen zu können, wird häufig mit VTOL (Vertical Take-Off and Landing) abgekürzt.

Der einfachste Ansatz besteht darin, einen konventionellen Hubschrauberrotor im Schnellflug von seiner Auftriebs- und/oder Vortriebsfunktion ganz oder teilweise zu entlasten. Tragflächen unterstützen oder übernehmen die Auftriebserzeugung, Propeller- oder Schubtriebwerke produzieren zusätzlichen Vortrieb. Untersuchungen zu derartigen Compound-Fluggeräten finden sich u.a. in [26], [27] und [31]. Der entlastet mitdrehende Rotor verursacht jedoch einen erheblichen Widerstand, so daß keines der beschriebenen Projekte sonderlich erfolgreich war.

Eine bessere aber konstruktiv sehr aufwendige Lösung fand man mit den Kipprotor- und Kippflügelflugzeugen (vgl. [7]). Bei diesen werden die Hubrotoren für den Schnellflug in Flugbahnrichtung geschwenkt und als Vortriebserzeuger genutzt, während Tragflächen den Auftrieb erzeugen. Wegen der völlig unterschiedlichen Betriebsbedingungen im Schwebeflug bzw. Schnellflug (mäßige tangentialer gegenüber schneller axialer Anströmung), zwingt die Auslegung derartiger Rotoren jedoch zu großen Kompromissen. Es wurde daher zusätzlich vorgeschlagen, die Blätter dieser in Flugrichtung geschwenkten Rotoren im Schnellflug stillzusetzen und zu falten. Dabei kommen spezielle Kombinationstriebwerke zum Einsatz, die von Wellenleistung auf Strahlschub umgeschaltet werden können (siehe dazu [23]).

Einfacher ist es jedoch, die Rotoren horizontal stillzusetzen, da so viele der mit dem Kippen der Rotoren verbundenen Probleme wegfallen. Ferner können die Rotoren dann speziell für den Schwebeflug und mäßig schnellen Vorwärtsflug optimiert werden, ohne daß große axiale Anströmungen berücksichtigt werden müssen. Nach dem Falten und Verstauen der Blätter ergibt sich für den Schnellflug eine reine Flächenflugzeugkonfiguration mit ihrem hohen Geschwindigkeitspotential. Dieses Konzept wird häufig als Stopp-Rotor (-Flugzeug) bezeichnet und wird Gegenstand dieser Arbeit sein. Bild 1.1 zeigt die Flugbereichsgrenzen für die hier aufgezählten VTOL-Fluggeräte (nach [4]). Deutlich erkennt man die Überlegenheit des Stopp-Rotors gegenüber dem Hubschrauber, aber auch gegenüber den anderen Konzepten.

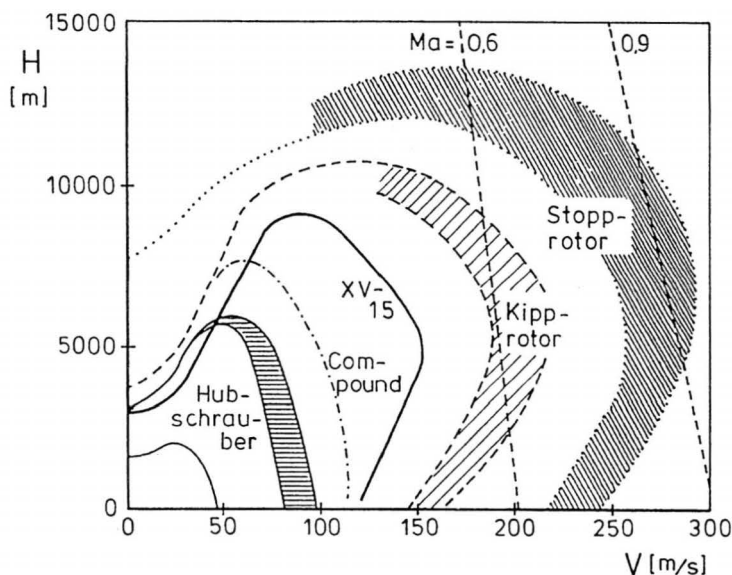


Bild 1.1 Flugbereichsgrenzen für verschiedene senkrechtstartfähige Fluggeräte (nach [4])

Eine zusätzliche Variante wird in [2] und [28] beschrieben; bei dieser wird zunächst der Rotordurchmesser durch teleskopartiges Einfahren der äußeren Blattabschnitte verringert. Der verkleinerte Rotor lässt sich dann bei höheren Fluggeschwindigkeiten effizienter betreiben, aber auch leichter stillsetzen und platzsparender verstauen.

1.1 Konzept des Verwandlungsdrehflüglers mit horizontal stillsetzbaren Rotoren

Hauptmerkmal aller Stopp-Rotor-Flugzeuge sind also spezielle Rotoren, die im Fluge angehalten bzw. wiederangefahren werden können. Bei einigen Konzepten wird der Rotor nach der Stillsetzung in einer bestimmten Stellung fixiert und in manchen Fällen sogar als Starrflügel weiter zur Auftriebserzeugung eingesetzt (vgl. z.B. [3], [4], [5] und [25]). Bild 1.2 zeigt ein entsprechendes Fluggerät nach [14]. Es besitzt zum Ausgleich der Drehmomente zwei gegenläufige, ineinanderkämmende Rotoren, die im Reiseflug in Längsrichtung verriegelt werden. Die Anforderungen an die Rotorblätter sind bei diesem Prinzip besonders

hoch, da diese auch ohne die versteifenden Zentrifugalkräfte bei hohen Staudrücken keine Divergenz- oder Flatterinstabilitäten zeigen dürfen (siehe Kap. 5.1.3 bzw. 5.1.4).

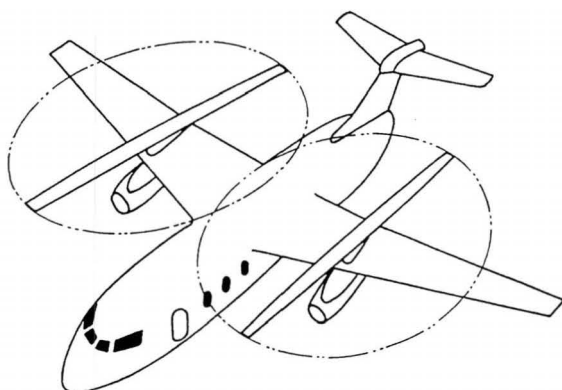


Bild 1.2 Stopp-Rotor-Flugzeug mit zwei ineinanderkämmenden Rotoren

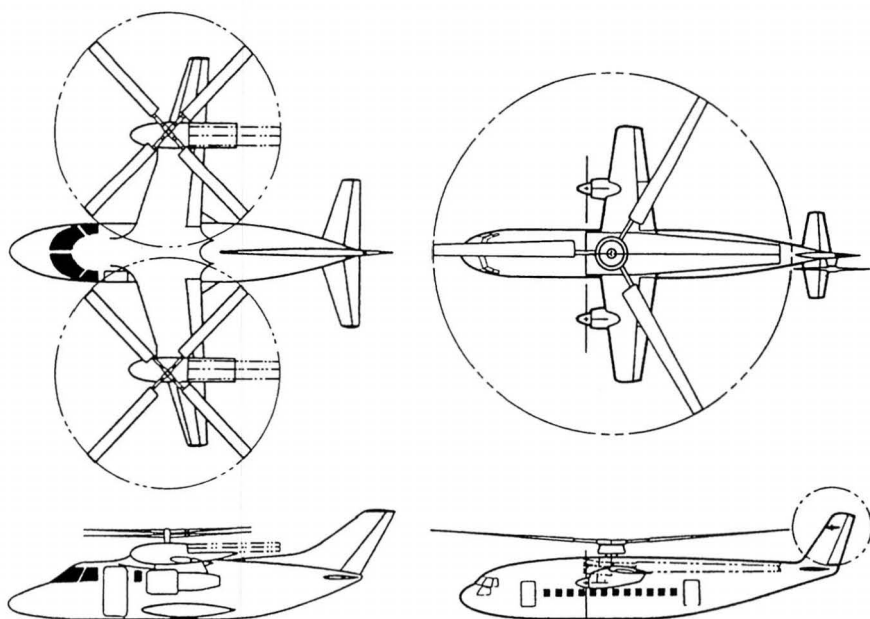


Bild 1.3 Stopp-Rotor-Projekte von MBB ("Rotor-Jet" nach [11], links) und aus einer NASA Studie (nach [22], rechts)

Die andere Möglichkeit besteht darin, die Rotorblätter nach dem Stillsetzungsvorgang zu falten und strömungsgünstig zu verstauen. Zu dieser Gruppe gehören die in Bild 1.3 dargestellten Projekte aus [11] bzw. [22]. Dem Vorteil des geringeren Widerstandes im Reiseflug und der einfacheren Blattauslegung steht der erhöhte Aufwand und das Mehrgewicht der komplizierteren Rotorkopfmechanik gegenüber. Bei Konzepten mit nur einem Rotor muß im rotorgetragenen Zustand durch einen Heckrotor für den Ausgleich des Drehmoments gesorgt werden.

Ein entscheidender Vorteil bei der Auslegung von Stopp-Rotor-Flugzeugen besteht darin, bezüglich der beiden widerstrebenden Anforderungen, Senkrechtstartfähigkeit und hohe Reisegeschwindigkeit, kaum Kompromisse eingehen zu müssen. Die Optimierung sowohl für den Hubschrauber- als auch für den Flächenflugzeug-Betriebszustand kann fast isoliert erfolgen und sich jeweils auf ein breites Spektrum an Erfahrungen und Vorbildern stützen. Die entscheidenden Probleme ergeben sich im Zusammenhang mit der sogenannten Konversion, d.h. dem Übergang von dem einen in den anderen Zustand. Der Ablauf läßt sich im einzelnen wie folgt beschreiben:

- Senkrechtes Starten entsprechend einem konventionellem Hubschrauber; die Triebwerke produzieren das für den Betrieb der Rotoren erforderliche Drehmoment.
- Beschleunigen auf die sogenannte Transitionsgeschwindigkeit, bei der im Hubschrauberezustand leistungsmäßig noch geflogen werden kann, andererseits der Staudruck aber ausreicht, um den erforderlichen Auftrieb allein durch die Tragflächen zu erzeugen.
- Entlastung der Rotoren durch Übertragen des Auftriebs vom Rotor auf den Flügel; die Triebwerke produzieren neben dem Restdrehmoment zur Einhaltung der Rotorendrehzahl zunehmend Propeller- oder Strahlschub und übernehmen damit die Vortriebsfunktion der Rotoren.
- Abbremsen, Anhalten, Falten und ggf. Verstauen der Rotoren noch bei Transitionsgeschwindigkeit.
- Beschleunigen im flächengetragenen Zustand auf die Reisegeschwindigkeit.

Die entsprechende Prozedur gilt umgekehrt für die Landung. Die einzelnen Phasen des Faltens und Einziehens der Rotorblätter sind in Bild 1.4 dargestellt (aus [6]). Es wird deutlich, welcher mechanische Aufwand erforderlich ist, um den Rotor derart strömungsgünstig zu verstauen.

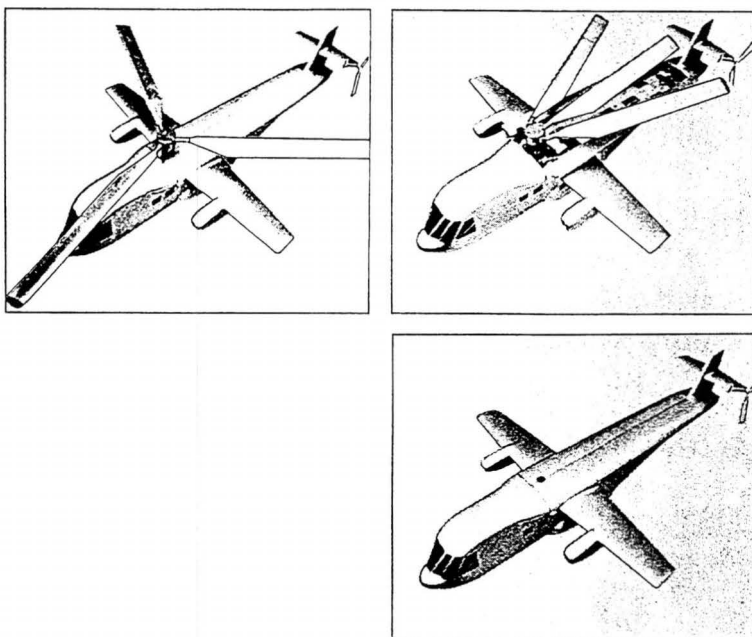


Bild 1.4 Falt- und Einziehvorgang bei einem Stopp-Rotor-Flugzeug von Lockheed (nach [6])

1.2 Stand der Forschung

Erste Versuche zur Rotorstillsetzung gehen zurück in das Jahr 1937. Zu dieser Zeit wurden gerade die ersten voll steuerbaren Hubschrauber erprobt, die Mehrzahl der Drehflügelfluggeräte basierte jedoch noch auf dem Tragschrauberprinzip mit frei laufendem, nicht angetriebenem Rotor. Bild 1.5 zeigt das sogenannte Convertiplane, einen Doppeldecker, bei dem die obere Tragfläche als Rotor ausgebildet war, um sie zur Verbesserung der Langsamflugeigenschaften bei Bedarf als Tragschraube zu betreiben (nach [6]). Während das Entriegeln und Anlaufen des Rotors im Flugversuch erfolgreich demonstriert werden konnte, gelang der umgekehrte Vorgang damals nicht.

In den 60er und 70er Jahren wurde das Stopp-Rotor-Konzept dann vor dem Hintergrund der bei Hubschraubern nicht weiter zu steigenden Fluggeschwindigkeit von mehreren Firmen untersucht. Einen Überblick über die verschiedenen Aktivitäten geben die Arbeiten [5]

und [27]. Die Firma Sikorsky begann schon 1953 mit Windkanaluntersuchungen zu einziehbaren Ein- und Zweiblattrotoren [28]. Gemessen wurden Blattlasten für reduzierte aber konstante Rotordrehzahlen.

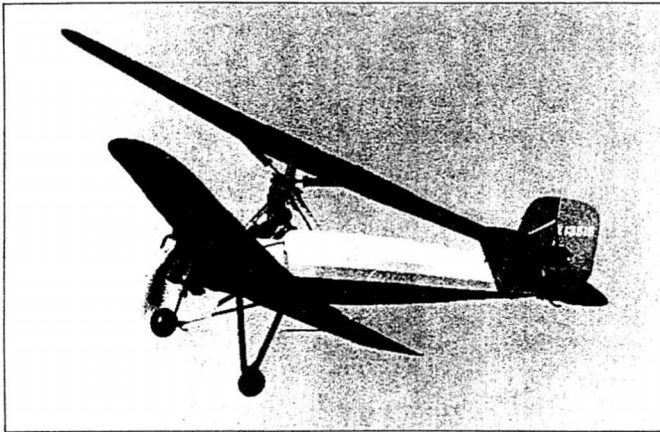


Bild 1.5 "Convertiplane" beim Übergang vom flächen- in den rotorgetragenen Flugzustand

Dann beschäftigte sich die Firma Lockheed intensiv mit verschiedenen Stopp-Rotor-Projekten. In [32] werden Windkanalergebnisse für ein komplettes Windkanalmodell mit Zelle und stillsetzbarem Zweiblattrotor präsentiert. Die Messungen lieferten die stationären Trimmkräfte, aber auch dynamische Blattlasten während des Stillsetzungsvorgangs. Ferner werden Untersuchungen zu Interferenzeffekten zwischen Rotor und Flügel sowie zur statischen Divergenz der Blätter beschrieben. Die Aktivitäten wurden dann 1967 noch einmal intensiviert und eine Reihe weiterer Untersuchungen an einem 1:1 Modell im Windkanal durchgeführt, siehe [29] und [30]. Das mit CL 870 bezeichnete Fluggerät hatte einen faltbaren Dreiblattrotor mit einem Durchmesser von 10 m. Die Arbeiten umfaßten Messungen der dynamischen Blattlasten bei der Stillsetzung, aerodynamische Untersuchungen an stillgesetzten Blättern zum Einfluß der radialen Strömungskomponente, aber auch theoretische Betrachtungen zum dynamischen Antwortverhalten. In [30] wird ein aeroelastisches Modell beschrieben, welches die Blatteigenschaften durch Matrizen von Einflußkoeffizienten erfaßt. Die Rechenergebnisse werden z.T. mit den Messungen verglichen, zeigen jedoch keine zufriedenstellende Übereinstimmung.

Zur gleichen Zeit wurde das Flatter- und Divergenzverhalten arretierter Hubschrauberblätter im Auftrag der U. S. Army untersucht, die Ergebnisse dazu finden sich in [20]. Die Firmen Bell Helicopter und Aérospatiale konzentrierten sich auf Kipp-Rotor-Konzepte, bei denen die Rotoren erst in Flugrichtung geschwenkt und dann stillgesetzt wurden, siehe [12] bzw. [18].

Ab 1967 beschäftigte man sich ausgehend von dem Messerschmitt-Projekt Me 408 "Rotor-Jet" (vgl. Bild 1.3) auch in Deutschland mit derartigen Verwandlungsdrehflüglern. In [17] sind Windkanaluntersuchungen mit Messungen zur Rotor-Rumpf-Interferenz, zum Trimmzustand, und zu den dynamischen Luftkräften bei reduzierter Drehzahl beschrieben. Ferner werden dort Böenempfindlichkeit und Autorotationseigenschaften diskutiert. Später wurden diese Arbeiten aufgegriffen und in theoretischen Untersuchungen zu Aspekten der Steuerbarkeit und der flugmechanischen Auslegung weitergeführt, [11].

In Frankreich verfolgte man mit dem horizontal stillsetzbaren Strahlklappenrotor ein etwas abweichendes Konzept. Dieser Rotor wird mittels Ausblasung von Druckluft durch Schlitze an den Blatthinterkanten angetrieben. Im Strahl der austretenden Luft befinden sich Klappensysteme, mit denen die Zirkulation am Blatt beeinflusst und damit der Auftrieb gesteuert werden kann. Solche Rotoren wurden im Windkanal erprobt und ihre Eignung für Verwandlungsdrehflügler untersucht, [10] und [15].

Nicht verstaут, sondern in diagonalen Stellung verriegelt wird der Vierblattrotor beim sogenannten X-Wing, einer gemeinsamen Stopp-Rotor-Entwicklung der Firma Sikorsky und der NASA. Durch einseitige oder wechselseitige Ausblasung an den Hinter- bzw. Vorderkanten der symmetrischen Profile lassen sich die Blätter sowohl als Rotor, wie auch (arretiert) als um $\pm 45^\circ$ gefeilte Tragflächen betreiben. Da die nach vorne gefeilten Blätter bei den hohen angestrebten Fluggeschwindigkeiten stark divergenzgefährdet sind (vgl. Kap. 5.1.3), ergeben sich die für die Rotorauslegung kritischen Beanspruchungen dabei weniger aus dem Stillsetzungsvorgang als aus dem Schnellflug. Untersuchungen zum dynamischen Verhalten eines derartigen Rotorsystems finden sich u.a. in [3].

Eine Reihe weiterer Arbeiten beschäftigt sich mit spezielleren Aspekten wie den Flugleistungen ([4], [7] und [19]), oder der flugmechanischen Steuerbarkeit solcher Fluggeräte ([16] und [25]). Die Berichte [13] und [14] der DFVLR Göttingen fassen die auf Stopp-Rotoren anwendbaren klassischen Methoden der Aeroelastik zusammen. Vereinzelt finden

sich auch Beispielrechnungen zu Flatter- und Divergenzproblemen stillgesetzter Blätter, die besonderen Eigenschaften parametererregter Systeme werden dabei jedoch nicht berücksichtigt.

Im Vordergrund stehen in den aufgeführten Arbeiten also zumeist Fragen der technischen Realisierbarkeit. Es fehlt aber an grundlegenden Untersuchungen zum Charakter der auftretenden Instabilitäten bzw. Resonanzen, zu deren mathematischer Behandlung oder zu Möglichkeiten der aktiven Steuerung. Fragen der Stabilität von Hubschrauberrotoren werden dagegen in einer großen Anzahl von Veröffentlichungen behandelt (z.B. [76] bis [93]), ihre Anwendbarkeit auf Stopp-Rotoren ist jedoch eher begrenzt. Hubschrauber operieren bei Fortschrittsgraden (d.h. dem Verhältnis von Flug- zu Blattspitzengeschwindigkeit, siehe Gl. (2.13)) von weniger als 0.5, dabei treten die meisten der für Stopp-Rotoren typischen dynamischen Probleme nicht auf. Entsprechend enthalten fast alle beschriebenen Modelle Vereinfachungen, die bei Hubschraubern durchaus sinnvoll, bei Anwendung auf Fragen der Stillsetzung mit Fortschrittsgraden bis zu unendlich jedoch unzulässig sind. Die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehenden Schlaginstabilitäten bei hohen Fortschrittsgraden werden zwar in einigen Arbeiten diskutiert, primär aber im Hinblick auf die Begrenzung der Höchstgeschwindigkeit von Hubschraubern klassischer Auslegung. An diese Untersuchungen (vgl. z.B. [38], [78], [80] und [82]) wird später in Kapitel 4 angeknüpft.

1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden theoretische Betrachtungen zur Stabilität der Rotorblattbewegungen während des Stillsetzungsvorgangs von Stopp-Rotoren angestellt. Im Vordergrund steht die Schlagbewegung, die bei Reduzierung der Rotordrehzahl im Vorwärtsflug (bei klassischer Rotorauslegung) instabil wird. Die die Blattbewegungen beschreibenden Differentialgleichungen besitzen periodische Koeffizienten, wobei der Fortschrittsgrad über die Stärke der sich daraus ergebenden Parametererregung entscheidet. Während die stabilisierenden Zentrifugalkräfte beim Reduzieren der Rotordrehzahl abnehmen, wachsen die schädlichen Periodizitäten mit dem Fortschrittsgrad an.

Ziel der Arbeit ist die systematische Untersuchung der Ursachen von Instabilitäten und die Ermittlung aller relevanten Einflußparameter. Dazu werden mehrere mathematische Modelle unterschiedlicher Abbildungsgenauigkeit und Komplexität verwendet. Zur

Beschreibung der grundlegenden Effekte kommen analytische Ansätze zur Anwendung, mit denen sich Verbindungen zu bekannten Ergebnissen herstellen lassen. Außerdem ermöglicht der Verzicht auf rechenzeitintensive rein numerische Verfahren, die Untersuchungen auf einen weiten Parameterbereich auszudehnen. Wo es nötig erscheint, wird, aufbauend auf den gewonnenen Ergebnissen, die Modellierung schrittweise verfeinert. Dazu werden nichtlineare Effekte ebenso berücksichtigt wie die Kopplung der Schlagbewegung mit den zusätzlich betrachteten Blattfreiheitsgraden Torsion und Schwenken.

Neben den möglichen Instabilitäten ergeben sich weitere Probleme durch das Auftreten großer Antwortamplituden, die ebenfalls Folge der starken Parametererregung sein können. Es soll gezeigt werden, wie bei nichtlinearer Betrachtung die Frage nach Stabilität mit der Ermittlung der periodischen Lösungen zusammenhängt. Letztere bestimmen insbesondere auch die Größe der Amplituden und damit den Einfluß der Nichtlinearitäten.

Schließlich wird diskutiert, durch welche konstruktiven oder regelungstechnischen Maßnahmen sich Instabilitäten vermeiden und die Antwortamplituden reduzieren lassen. Der Einsatz von elektronischen Flugregelsystemen richtet sich bei konventionellen Hubschraubern zur Zeit noch vorwiegend auf die Verbesserung der dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems. Die neueren Aktivitäten auf dem Gebiet der aktiven (auch höherharmonischen) Rotorblattsteuerung lassen es jedoch als sinnvoll erscheinen, die Anwendbarkeit derartiger Systeme auch im Hinblick auf die Stabilisierung der Blattbewegungen während der Rotorstillsetzung zu untersuchen.

Ziel der Arbeit ist es nicht, einen Stopp-Rotor einsatzreif auszulegen; vielmehr konzentrieren sich die Untersuchungen auf die physikalischen Hintergründe im Zusammenhang mit der Stabilität bei der Stillsetzung. Es wird versucht, die Strukturen der Stabilitätseigenschaften und des Antwortverhaltens herauszuarbeiten, um zu grundlegenden Aussagen hinsichtlich der Rotorauslegung und regelungstechnischer Maßnahmen zu gelangen. Dabei sind erst durch eine Reihe von Vereinfachungen bei der Modellierung systematische Beispielrechnungen möglich, mit denen sich die wichtigsten aeromechanischen Phänomene bei Stopp-Rotor-Flugzeugen erklären lassen.

Die vorliegende Arbeit beginnt mit der Herleitung der zur Beschreibung der Blattbewegungen verwendeten Modelle. Nach einigen Betrachtungen zum zugrunde gelegten Fluggerät wird zunächst auf die Blatteigenformen eingegangen. Es folgen Erläuterungen zu den im

weiteren verwendeten Blattanschlußersatzmodellen. Neben der üblichen mathematischen Modellierung der Rotorblattbewegungen nach der Blattelemententheorie werden dann insbesondere jene Modifikationen und Ergänzungen beschrieben, welche die Berücksichtigung der Rückanströmung ermöglichen.

In Kapitel 3 werden verschiedene mathematischen Methoden zusammengefaßt und diskutiert, mit denen sich parametererregte Systeme behandeln lassen. Dies sind zum einen die FLOQUET-Theorie zur Stabilitätsanalyse, zum anderen jene Verfahren, mit denen sich die periodischen Lösungen der Differentialgleichungen bestimmen lassen.

Die eigentlichen Untersuchungen zur Stabilität und zum Antwortverhalten sind in Kapitel 4 für die isolierte Schlagbewegung und Kapitel 5 für die gekoppelten Freiheitsgrade beschrieben. Bei der Einfreiheitsgradbetrachtung werden zunächst Zusammenhänge mit der STRUTT'schen Stabilitätskarte aufgezeigt, woraus sich einige prinzipielle Einblicke in das Phänomen der Parameterresonanz ergeben. Es werden dann die Ergebnisse diverser Stabilitätsrechnungen dargestellt und dabei die Einflüsse verschiedener Parameter diskutiert. Insbesondere wird auch die Auswirkung der Rückanströmung auf die Stabilität erörtert. Es schließen sich Simulationen bei variabler Rotordrehzahl an, die den Einfluß von Drehzahländerungen auf die Ausbildung von Instabilitäten aufzeigen.

Der erste Teil von Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Torsionsbewegung der Rotorblätter. Zunächst werden Divergenz und dynamische Stabilität des isolierten Freiheitsgrades behandelt und die Betrachtungen anschließend auf das gekoppelte Schlag-/Torsionsmodell ausgedehnt. Ausgangspunkt ist das aus Untersuchungen zu konventionellen Hubschraubern bekannte klassische Rotorblattflattern. Analog wird im zweiten Teil von Kapitel 5 die Schwenkbewegung behandelt. In diesem Fall ergeben sich Kopplungen mit der Schlagbewegung allerdings erst bei Berücksichtigung nichtlinearer Effekte. Das Kapitel schließt mit der Darstellung von Ergebnissen, die mit einem numerischen, nichtlinearen Modell unter Berücksichtigung aller drei Freiheitsgrade gewonnen wurden.

Kapitel 6 widmet sich schließlich solchen regelungstechnischen Maßnahmen, welche die Rotoreigenschaften verbessern helfen. Dazu werden zunächst mögliche Konzepte gegenübergestellt und dann für eine ausgewählte Reglerstruktur Beispielrechnungen präsentiert. Die beiden wichtigsten Auslegungsziele für einen derartigen Regler *Stabilisierung* und *Amplitudenreduzierung* werden nacheinander behandelt.

Der Anhang umfaßt neben der Auflistung aller verwendeten Daten eine systematische Zusammenstellung der wichtigsten Gleichungen. Ferner finden sich dort Diagramme zu den verwendeten aerodynamischen Beiwerten sowie eine kurze Beschreibung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Rechenprogramms ARNCON.

2 Die mathematische Modellierung des Stopp-Rotors

Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Untersuchung der Stabilität der Blattbewegungen. Dafür sind zum einen die mechanischen Eigenschaften der Blätter zu modellieren, zum anderen alle angreifenden Massen- und Luftkräfte zu beschreiben. Im folgenden werden die mathematischen Modelle entwickelt und diskutiert, die den weiteren Untersuchungen zugrunde liegen. Dabei sind die für Hubschrauber gültigen Ansätze an die Besonderheiten des Stopp-Rotors anzupassen.

Die Blätter werden grundsätzlich isoliert betrachtet, d.h. es wird angenommen, daß sich die Rotomabe unabhängig von den Blattbewegungen mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit V rein translatorisch bewegt. Auch aerodynamische Kopplungen der Blätter untereinander durch den Nachlauf bzw. abfließende Wirbel werden nicht berücksichtigt.

Da die Auslegung der Blätter von der Gesamtkonzeption des Fluggerätes und von den flugmechanischen Betriebsbedingungen beeinflusst wird, folgt zunächst eine Beschreibung der zugrunde gelegten Stopp-Rotor-Konfiguration und der möglichen Drehzahlverläufe bei der Rotorstillsetzung, bevor auf Details der mathematischen Modellierung der Blätter eingegangen wird. Mit Rotorstillsetzung soll im weiteren jener Abschnitt der Konversion bezeichnet werden, in welchem die Drehzahl des schubentlasteten Rotors von Nenndrehzahl auf null abgesenkt wird.

2.1 Auslegungsparameter des Fluggerätes

Als fiktives Fluggerät wurde geometrisch die Konfiguration nach Bild 1.3 links (Messerschmitt Rotor-Jet, siehe [11]) gewählt, die Abflugmasse aber auf 9600 kg erhöht. Die weiteren Auslegungsdaten orientieren sich an den Angaben in [10], [11], [17], [22], [25] und [30]. Die Spanne der Kreisflächenbelastungen reicht in der Literatur von 290 bis 1250 N/m², verwendet wird hier ein mittlerer Wert von 600 N/m². Für die Transitionsgeschwindigkeit wurde mit 50 m/s ein vergleichsweise niedriger Wert angesetzt, um bei den Stabilitätsbetrachtungen einen möglichst großen Fortschrittsgradbereich abzudecken. Alle Berechnungen in dieser Arbeit erfolgen quasi für eine Hälfte des völlig symmetrischen Flugzeugs,

d.h. für *einen* Rotor, *ein* Triebwerk und beziehen sich entsprechend nur auf das halbe Fluggewicht. Die genauen Zahlenwerte sind im Anhang A.1 zusammengestellt.

Der Vollständigkeit halber seien hier noch einige abgeleitete Größen für den Schwebeflugzustand angeführt, die sich mit den gewählten Daten ergeben; die dazu ausgewerteten Beziehungen sind ausführlich in [36] beschrieben.

• Schubbeiwert	k_z	=	0.016
• Schwebefugleistung	P_s^{eff}	=	1050 kW
• induzierter Abwind	w_i	=	15.6 m/s
Durchflußgrad	δ	=	-0.020
• optimaler Verwindungsverlauf (hyperbolisch) $\vartheta = \vartheta_2/x$	ϑ_2	=	0.14 rad
lineare Näherung $\vartheta = \vartheta_1 x$	ϑ_1	=	-0.28 rad

2.2 Der Stillsetzungs- und Anfahrvorgang

Obwohl es nicht das Ziel dieser Arbeit ist, die Drehzahlverläufe für das Abbremsen und Wiederanfahren des Rotors in Hinblick auf ihre flugmechanischen Auswirkungen zu optimieren, soll doch geklärt werden, in welchem Bereich sich die Drehzahländerungen bewegen können. Die Angaben in den genannten Veröffentlichungen sind dazu sehr unterschiedlich. Für die Stillsetzung werden Zeitspannen von 4 s bis 26 s mit maximalen Drehzahländerungen von -20 rad/s^2 genannt, für das Anfahren finden sich Zeiten von 13 s bis 80 s und Beschleunigungen bis zu 5.5 rad/s^2 .

Zunächst wird für den tangential angeströmten, entlasteten Rotor der Einfluß der Luftkräfte auf das Rotordrehmoment abgeschätzt. Bei unverwundenen Blättern muß nur der Profilwiderstand berücksichtigt werden, und es ergibt sich als Mittelwert

$$-Q_{Ro}^{Luft} = \frac{z\rho C_{x0} l_B l R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_A v_t |v_t| x dx d\psi \quad (2.1)$$

$$\text{mit } v_t = \Omega R(x + \mu \sin \psi) \quad (2.2)$$

Die bei niedrigen Rotordrehzahlen auftretende Rückanströmung wird durch die Berücksichtigung des Vorzeichens von v_t im Integranden erfaßt. Detaillierte Erläuterungen zur

analytischen Behandlung der Rückanströmung enthält Kap. 2.5.2 . Um die Drehzahldifferentialgleichungen geschlossen lösen zu können, wird hier nur eine quadratische Näherung verwendet; sie lautet mit den Blattdaten aus Anhang A.1

$$-Q_{Ro}^{Luft} = Q_2 \Omega^2 + Q_1 \Omega \quad (2.3)$$

mit $Q_1 = 9.5 \text{ kgm}^2/\text{s}$
und $Q_2 = 1.11 \text{ kgm}^2$.

In [77] wird sogar nur der Q_2 -Term angesetzt. Bildet man die Summe der Momente um die Rotorachse, ergibt sich mit dem Trägheitsmoment $J_{Ro} \dot{\Omega}$, dem Luftkraftmoment nach Gl. (2.3) und dem Antriebs- bzw. Bremsmoment $Q_{TW/Br}$ die Drehzahldifferentialgleichung zu

$$J_{Ro} \dot{\Omega} + Q_2 \Omega^2 + Q_1 \Omega = Q_{TW/Br} \quad (2.4)$$

Betrachtet man diese Gleichung zunächst für $Q_{TW/Br} = 0$, d.h. für den Fall des ungebremst auslaufenden Rotors, erhält man eine BERNOULLI-Differentialgleichung, welche sich mit der Transformation $\Omega = 1/\Omega^*$ durch Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten lösen läßt:

$$\Omega = \frac{1}{\left[\frac{Q_2}{Q_1} + \frac{1}{\Omega_{nenn}} \right] e^{(Q_1/J_{Ro})t} - \frac{Q_2}{Q_1}} \quad (2.5)$$

für $\Omega(t=0) = \Omega_{nenn}$.

Den sich daraus ergebenden Verlauf zeigt Bild 2.1; die Rotordrehzahl sinkt nur sehr langsam, so daß die Verwendung einer Rotorbremse als sinnvoll erscheint. Setzt man ein entsprechendes Bremsmoment $Q_{Br} < 0$ auf der rechten Seite von Gl. (2.4) an, ergibt sich eine RICCATI-Differentialgleichung. Wieder findet man die analytische Lösung über eine Transformation, in diesem Fall der Form

$$\Omega = -\frac{J_{Ro}}{Q_2} \Omega^* - \frac{Q_1}{2Q_2} \quad (2.6)$$

Die hier interessierende Lösung für $Q_{Br}Q_2 + Q_1^2/4 < 0$ lautet

$$\Omega = -\frac{A}{Q_2} \cot \left[\arctan \left[\frac{A}{J_{Ro} \Omega_{nenn}^*} \right] - \frac{A}{J_{Ro}} t \right] - \frac{Q_1}{2Q_2} \quad (2.7)$$

$$\text{mit } A = \sqrt{-Q_{Br}Q_2 - Q_1^2/4} \quad (2.8)$$

Bei einem Bremsmoment von -4% des maximal verfügbaren Antriebsdrehmoments kommt der Rotor nach 30 s zum Stillstand, siehe ebenfalls Bild 2.1. Für den Fall des Wiederauffahrens ermittelt man zunächst die stationäre Lösung mit $\dot{\Omega} = 0$ zu

$$\Omega_{\max} = \frac{B - Q_1}{2Q_2} \tag{2.9}$$

und transformiert diesmal mit $\Omega = \Omega_{\max} + 1/\Omega^*$. Die Lösung hat nun die Form

$$\bar{\Omega} = \Omega_{\max} + \frac{1}{C e^{(C/J_{Ro})t} - \frac{Q_2}{B}} \tag{2.10}$$

$$\text{mit } B = \sqrt{4Q_{TW}Q_2 + Q_1^2} \tag{2.11}$$

$$\text{und } C = \frac{Q_2(B + Q_1)}{B(B - Q_1)} \tag{2.12}$$

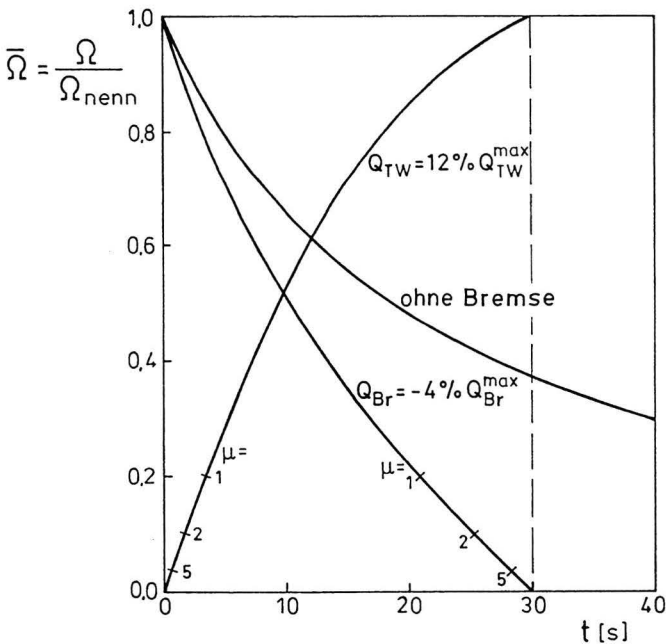


Bild 2.1 Drehzahlverläufe beim Stillsetzungs- und Anfahrvorgang

Auch dieser Verlauf ist in Bild 2.1 dargestellt; es werden ca. 12% des Triebwerksdrehmoments benötigt, um den Rotor in 30 s vom Stillstand auf Nenndrehzahl zu beschleunigen. Mehrere Autoren (z.B. [11], [25]) kommen bei ihren Untersuchungen zu dem Schluß, daß aus flugmechanischer Sicht sowohl das Abbremsen als auch das Beschleunigen möglichst schnell erfolgen sollte. Gibt man eine Dauer von nur 3 s vor, liegen im betrachteten Fall die erforderlichen bezogenen Momente bei –65% bzw. 72%. Dabei ist zu berücksichtigen, daß in dieser Flugphase ein erheblicher Teil der Triebwerksleistung zum Erzeugen von Vortrieb benötigt wird und nicht zum Beschleunigen des Rotors zur Verfügung steht.

In Kapitel 4.5 werden Stabilitätsrechnungen für variable Drehzahl beschrieben, und auch dort zeigt sich der Vorteil schneller Drehzahländerungen. In Hinblick auf eine sichere Beherrschung von Systemausfällen (Triebwerk, Rotorbremse, Getriebe etc.) ist jedoch zu fordern, daß die Start-/Stopp-Prozedur in jeder Phase unterbrochen und ggf. umgekehrt werden kann. Somit sollte bei der Auslegung konservativ davon ausgegangen werden, daß der Rotor bei allen kritischen Drehzahlen stationär betrieben werden kann, ohne daß sich gefährliche flugmechanische oder rotordynamische Instabilitäten ausbilden. Im weiteren wird die Stillsetzung daher vorwiegend quasistationär betrachtet, d.h. die präsentierten Stabilitätsrechnungen betreffen einzelne, konstante Drehzahlen, werden dann aber für die gesamte Prozedur jeweils in *einem* Diagramm zusammenhängend dargestellt. Wie sich später herausstellen wird, ist bezüglich der Struktur des Stabilitätsverhaltens eine Auftragung über $1/\Omega$ derjenigen über Ω vorzuziehen. Als Abszisse wird im folgenden daher häufig der Fortschrittsgrad

$$\mu = \frac{V \cos \alpha_{Ro}}{\Omega R} \approx \frac{V}{\Omega R} \quad (2.13)$$

verwendet, der gleichzeitig das Anwachsen der periodischen Luftkräfte beim Stillsetzen beschreibt. Bild 2.2 zeigt den Zusammenhang zwischen Ω und μ für die *konstante* Transitions geschwindigkeit V . Im Gegensatz zur üblichen Verwendung des Fortschrittsgrades als dimensionslose Fluggeschwindigkeit, ergeben sich wachsende μ in dieser Arbeit also immer aus einer entsprechenden Verringerung der Rotordrehzahl.

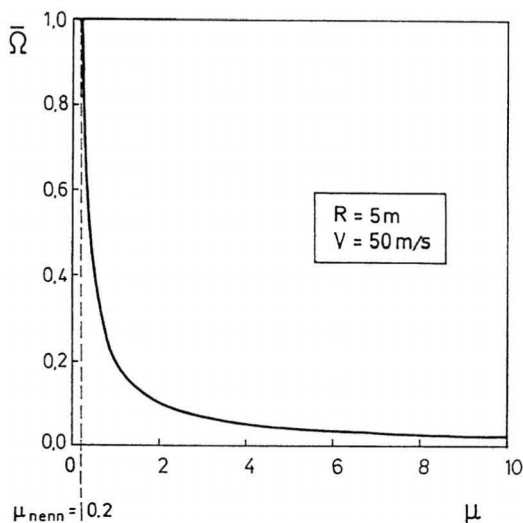


Bild 2.2 Zusammenhang zwischen Rotordrehfrequenz und Fortschrittsgrad bei der Transitionsgeschwindigkeit

2.3 Modellierung der elastischen Blatteigenschaften

Durch das Auftreten von örtlich verteilten Zentrifugal- und Luftkräften, ergeben sich für die Beschreibung der elastischen Blattbewegungen partielle Differentialgleichungen, die sich einer rein analytischen Behandlung entziehen. Übersichten zu den wichtigsten Lösungsverfahren finden sich z.B. in [13], [14], [36], [37], [38] oder [51]. Diese Methoden sind i.a. jedoch derart aufwendig, daß für Stabilitätsuntersuchungen nur in seltenen Fällen die vollständigen Lösungen herangezogen werden; vielmehr haben sich für die verschiedenen Fragestellungen bestimmte Vereinfachungen als zulässig erwiesen, siehe [41], [42], [43] und [48]. Die meisten Stabilitäts- und Resonanzphänomene lassen sich sogar mit sehr einfachen Blattmodellen untersuchen.

Wie sich aus den Untersuchungen ergibt, müssen die Blätter bei stillzusetzenden Rotoren verhältnismäßig steif am Rotorkopf angeschlossen sein. Es ist im folgenden also von sogenannten gelenklosen Rotoren auszugehen, bei denen die elastischen Blätter keine Bewegungen um irgendwelche realen Gelenke im Blatthalsbereich ausführen können (außer ggf. nach der Stillsetzung beim Faltvorgang), sondern starr mit dem Rotorkopf verbunden sind.

Die in dieser Arbeit verwendeten Ersatzmodelle nähern die elastischen Eigenformen des Blattes aber durch die Bewegungen eines gelenkig angeschlossenen starren Balkens an. Die elastischen Kräfte werden jeweils durch eine im Gelenk wirkende Drehfeder nachgebildet. Mit solchen Modellen ist es möglich, die ersten Biege- und Torsionseigenfrequenzen, die zugehörigen Eigenformen und die Blattanschlußkräfte hinreichend genau zu beschreiben. Die Qualität der Ergebnisse hängt dabei jedoch entscheidend von der Wahl der die Ersatzmodelle beschreibenden sogenannten Ersatzgrößen ab. Für die Torsionsbewegung ist zusätzlich noch zu beachten, daß ein oft erheblicher Anteil der Blattverdrehung auf Nachgiebigkeiten im Steuerungssystem (zur Blattwinkleinstellung) und nicht auf die elastischen Verformungen im Blatt selbst zurückzuführen ist.

Die bezüglich der Blattstabilität bei hohen Fortschrittsgraden entscheidende Eigenform betrifft den Schlagfreiheitsgrad, d.h. die Bewegung des Rotorblattes senkrecht aus der Rotorkreisebene heraus. Daher wurde die erste Schlagbiegeeigenform mit dem Ziel etwas genauer untersucht, geeignete Ersatzgrößen für die Rechnungen zu gewinnen. Für die übrigen in dieser Arbeit berücksichtigten Blattfreiheitsgrade gelten ähnliche Überlegungen. Die verwendeten Blattdaten wie Massenbelegung, Biegesteifigkeit und geometrische Abmessungen orientieren sich an bei Hubschraubern üblichen Werten (vgl. [36]), wobei das Blattgewicht mit Rücksicht auf die Beherrschung besonders großer Beanspruchungen etwas höher angesetzt wurde. Sofern nicht explizit andere Werte genannt sind, gelten für die Blattauslegung die Angaben aus Anhang A.1.

2.3.1 Beschreibung der Biegeeigenformen durch ein Gliederkettenmodell

Eine verbreitete Methode zur Ermittlung der Blatteigenformen beruht auf sogenannten Gliederkettenmodellen. Eine der möglichen Varianten zeigt Bild 2.3: diskrete Punktmassen sind über masselose Stäbe verbunden, die Steifigkeitseigenschaften werden durch Federgelenke nachgebildet. Mit einem derartigen Modell wurden die ersten drei Schlagbiegeeigenformen ohne Luftkrafteinfluß ermittelt. Bild 2.4 zeigt die normierten Auslenkungen der 20 Massenpunkte. Massenbelegung und Steifigkeit entlang des Blattes wurden dabei als konstant angenommen. Vergleicht man die Ergebnisse für $\Omega = 0$ mit den analytischen Lösungen, ergeben sich Abweichungen von -2.9% für die erste Eigenfrequenz und maximal 1.4% (bezogen auf die Auslenkung bei $x = 1$) für die erste Eigenform gegenüber den exakten Werten.

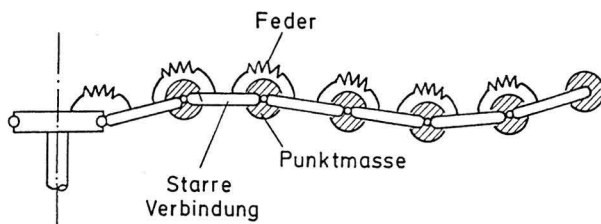


Bild 2.3 Einfaches Gliederkettenmodell

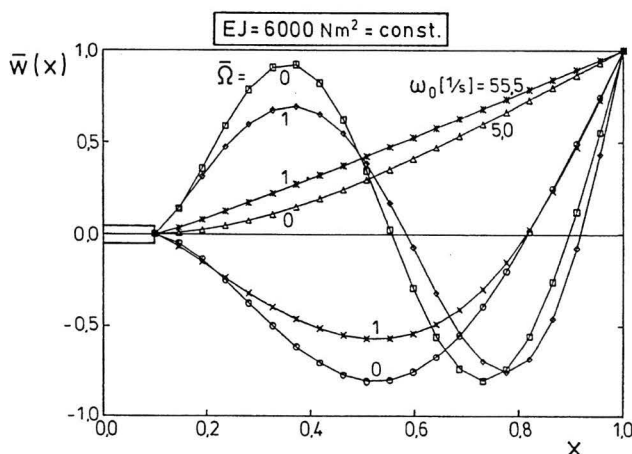


Bild 2.4 Die ersten drei Schlagbiegeeigenformen für das drehende und das nichtdrehende Blatt

Es wird deutlich, daß die Modellierung eines elastischen Blattes unter Zentrifugalkrafteinfluß durch einen starren Balken für die (hier ausschließlich interessierende) erste Eigenform gute Ergebnisse liefert; die Durchbiegung konzentriert sich auf einen kleinen Bereich nahe der Blattwurzel. Die Verhältnisse ändern sich jedoch für das stillgesetzte, nichtdrehende Blatt; in diesem Fall ist die Biegelinie auf einem längeren Abschnitt gleichmäßiger gekrümmt.

2.3.2 Das Blattanschlußersatzmodell

Mit Rücksicht auf den Rechenaufwand, beruhen alle später dargestellten Stabilitätsbetrachtungen auf den genannten Ersatzmodellen. Für die Schlagbewegung erhält man als Freiheitsgrad die Drehung des starren Blattes um das Schlaggelenk P, beschrieben durch den Schlagwinkel β . Es muß nun geklärt werden, wie die Ersatzgrößen (fiktiver) Schlaggelenkabstand a/R und Blattanschlußsteifigkeit c_β zu wählen sind, um die relevanten Blatteigenschaften möglichst genau nachzubilden. Wichtigster Parameter für dynamische Betrachtungen ist zunächst die Eigenfrequenz. Die mit dem Gliederkettenmodell berechneten Werte sind in [Bild 2.5](#) über der Rotordrehzahl dargestellt. Der entsprechende Verlauf für das Ersatzmodell ergibt sich aus der homogenen Schlagdifferentialgleichung ohne Berücksichtigung der Luftkräfte. Bildet man, wie in Kap. 4.1 im einzelnen ausgeführt, die Summe der Massenkraft- und Federmomente (vgl. Gl. (4.2), (4.3) und (4.6)) um die Schlaggelenkachse, erhält man

$$\beta'' + K_0 \beta = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{mit } K_0 = \left[\frac{\omega_0}{\Omega} \right]^2 = \frac{J^{CP}}{J^{PP}} + \frac{c_\beta}{J^{PP} \Omega^2} \quad (2.15)$$

Der erste Summand im Steifigkeitsterm K_0 beschreibt den Einfluß des Schlaggelenkabstandes auf die Eigenfrequenz und beeinflusst hauptsächlich die Asymptote für $\Omega \rightarrow \infty$. Der zweite Anteil enthält die Anschlußsteifigkeit und legt die Eigenfrequenz des nichtdrehenden Blattes fest. Durch die geeignete Wahl der beiden Ersatzgrößen läßt sich nun der Eigenfrequenzverlauf dem des Gliederkettenmodells nachbilden, siehe ebenfalls [Bild 2.5](#). Im vorliegenden Beispiel bleibt der maximale Fehler im gesamten Drehzahlbereich unter 3.4%; der sich ergebende fiktive Schlaggelenkabstand von $a/R = 0.13$ führt darüber hinaus bei Nenndrehzahl zu einer befriedigenden (geometrischen) Näherung der ersten Schlägeigenform, vgl. [Bild 2.4](#).

Auch die Anpassung der Eigenform hat Einfluß auf die Modellgüte. Verschiedene Autoren beschreiben (z.B. in [37], [38], [52] und [53]), wie der Gelenkabstand zu wählen ist, um eine möglichst gute Übereinstimmung der Luftkraftverteilungen und der Blattanschlußmomente zu erzielen. Sie schlagen vor, dabei von der Tangente an die Biegelinie bei $x = 0.7$ auszugehen. Will man diese Bedingung immer einhalten, muß der Schlaggelenkabstand bei Veränderungen der Rotordrehzahl jedoch nachgeführt werden. [Bild 2.6](#) zeigt dies am Beispiel zweier Biegelinien für verschiedene Drehzahlen.

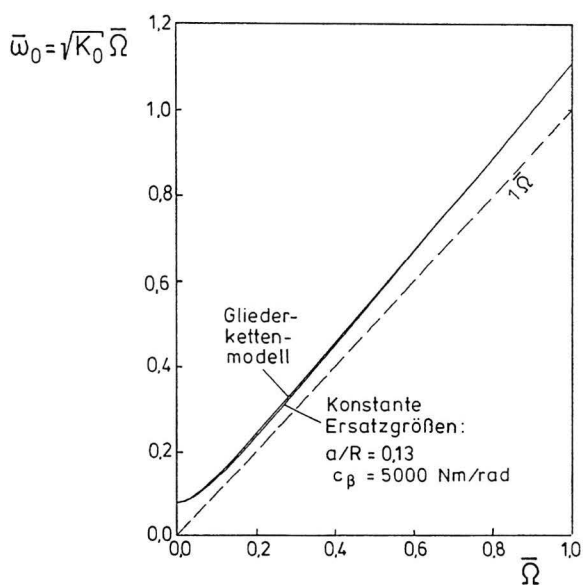


Bild 2.5 Verlauf der Schlageigenfrequenz (im Vakuum) für Gliederketten- und Ersatzgrößenmodell

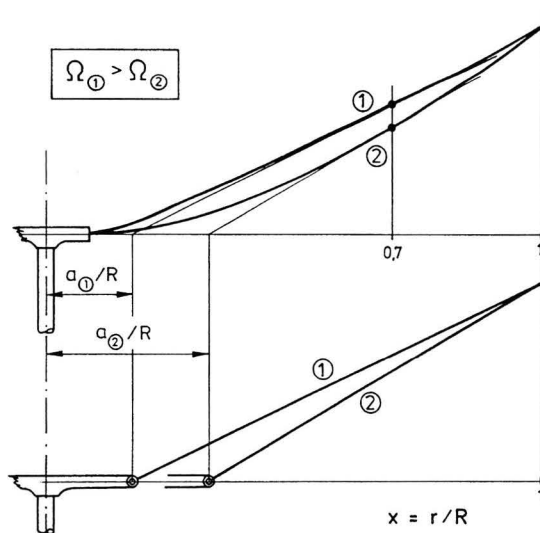


Bild 2.6 Ermittlung des fiktiven Schlaggelenkabstandes

Verschiebt man das Schlaggelenk in der beschriebenen Weise entsprechend der jeweiligen Rotordrehfrequenz, muß zur gleichzeitigen Befriedigung der Frequenzbedingung die Anschlußsteifigkeit neu abgeglichen werden. In Bild 2.7 sind zum Vergleich sowohl die konstanten als auch die nachgeführten Ersatzgrößen aufgetragen. Es ist interessant festzuhalten, daß die Ersatzfedersteifigkeit bei größeren Drehzahlen negativ wird, also physikalisch nicht mehr rückstellend sondern divergent wirkt. In diesem Bereich dient sie zum Ausgleich der sich aus der Gelenklage ergebenden zu großen Zentrifugalkräfte. Entsprechende Ergebnisse mit negativen Ersatzfedersteifigkeiten finden sich auch in [36] und [50].

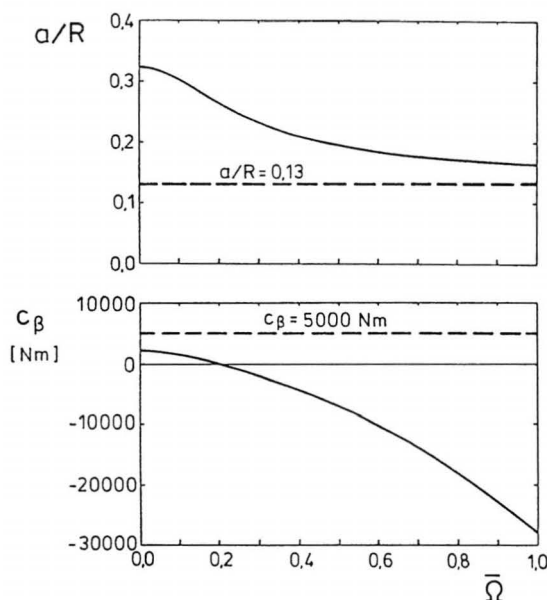


Bild 2.7 Konstante und nachgeführte Ersatzgrößen

Bei den üblichen Betrachtungen für eine feste Rotordrehzahl wird i.a. die dimensionslose Eigenfrequenz (im Vakuum) ω_0/Ω zur Beschreibung der mechanischen Blatteigenschaften verwendet. Für diese Arbeit mit Untersuchungen bei unterschiedlichen, insbesondere sehr kleinen Drehzahlen erweist sich die dimensionslose Eigenfrequenz des nichtdrehenden Blattes (bezogen auf die Nenn Drehzahl) als aussagekräftiger:

$$\bar{\omega}_\beta^{nr} = \frac{\omega_{0\beta}(\Omega = 0)}{\Omega_{nenn}} = \frac{\sqrt{c_\beta/J^{PP}}}{\Omega_{nenn}} \quad (2.16)$$

Diese Größe beschreibt die Zunahme des Eigenfrequenzverhältnisses ω_0/Ω beim Stillsetzen und beeinflusst damit entscheidend das Stabilitätsverhalten bei Reduzierung der Rotordrehzahl (vgl. Kap. 4.3.2.3 und [Bild 4.15](#)). Mit dem auch im weiteren verwendeten Begriff *Stabilitätsverhalten* seien die Veränderungen der Stabilität der Blattbewegungen im Bereich zwischen Nenndrehzahl und Rotorstillstand (d.h. der Verlauf der Eigenwert-Realteile über dem Fortschrittsgrad) bezeichnet.

Die Definition Gl. (2.16) läßt sich aber ebenso nur als dimensionslose Formulierung der Ersatzfedersteifigkeit auffassen. Man erhält damit für den konstanten Steifigkeitsterm der Schlagdifferentialgleichung die Form

$$K_0 = \frac{J^{CP}}{J^{PP}} + \left[\frac{\bar{\omega}_\beta^{pr}}{\Omega} \right]^2. \quad (2.17)$$

Außer der Schlagbewegung haben zwei weitere Eigenformen entscheidenden Einfluß auf das dynamische Blattverhalten. Beim Schwenken bewegen sich die Blätter in der Rotorebene vor und zurück, während sich bei der Torsion die Blätter um ihre Längsachse verdrehen. Ebenso wie beim Schlagen werden auch diese elastischen Verformungen durch Ersatzmodelle angenähert. In [Bild 2.8](#) sind die als Freiheitsgrade eingeführten Drehwinkel β , ζ und θ anschaulich dargestellt, während in [Bild 2.9](#) Details der zugrunde gelegten Geometrie definiert sind. In den Skizzen wurde davon ausgegangen, daß für die Ersatzgelenke der Schlag- und Schwenkbewegung der selbe Abstand a vom Rotormittelpunkt angesetzt werden kann.

Die elastische Torsion eines realen Rotorblattes setzt sich zusammen aus einem Anteil infolge der Nachgiebigkeiten in der Blattwinkelsteuerung und einem Anteil infolge der elastischen Verwindung des Blattes selbst. Für das Ersatzmodell werden üblicherweise beide Anteile zusammengefaßt und durch eine äquivalente Torsionsfederkonstante beschrieben (vgl. [37], [86] und [92]). Der Winkel θ beschreibt die Verdrehung des gesamten, als starr angenommenen Blattes gegenüber der durch den Steuerwinkel ϑ_{st} eingestellten Lage. Alle Drehwinkel und Momente werden rechtsdrehend positiv um die den Gelenken zugeordneten Koordinatenachsen gezählt. Die Gelenkfolge beeinflusst die Modellierung der elastischen Kopplungen zwischen den Freiheitsgraden, siehe z.B. [39]. Das Torsionsersatzgelenk befindet sich im vorliegenden Fall vom Rotorkopf aus betrachtet hinter dem Schlag- und dem Schwenkgelenk, aber noch vor dem aerodynamischen Blattanfang (also innerhalb von $x = A$).

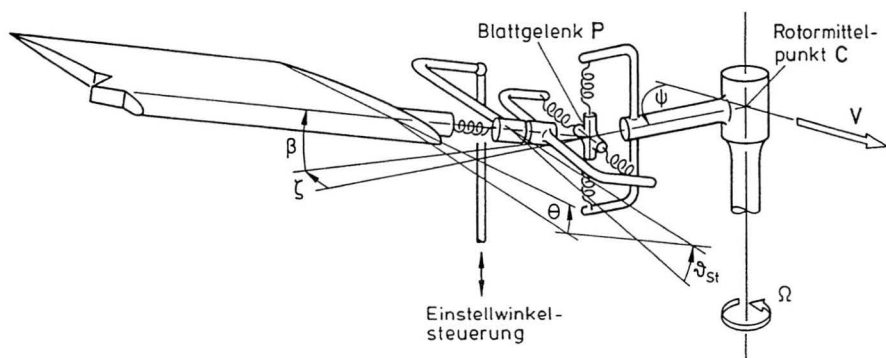


Bild 2.8 Blattanschlußersatzmodell für die Freiheitsgrade Schlagen, Schwenken und Torsion

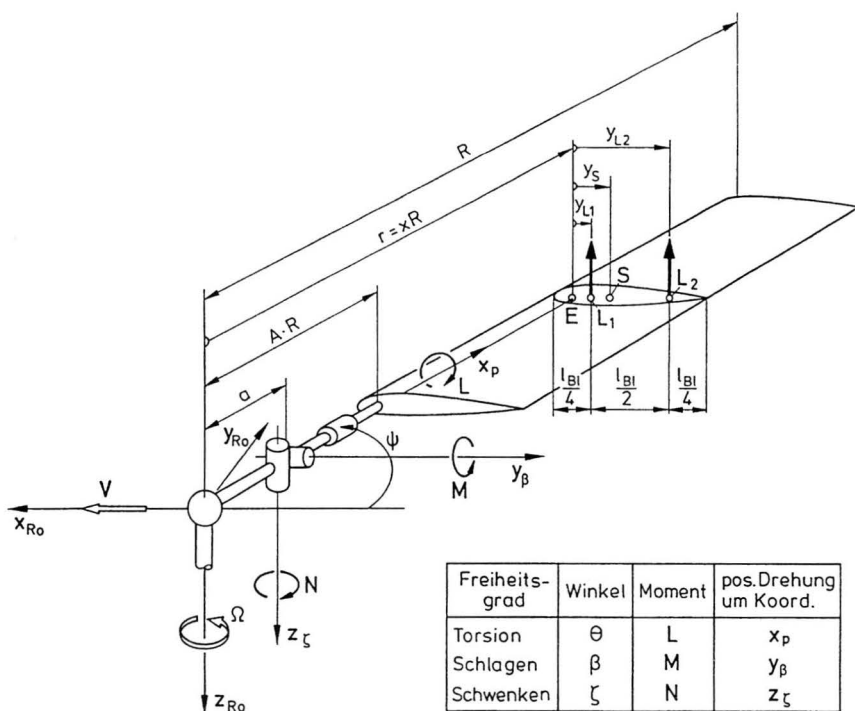


Bild 2.9 Definition der Blattgeometrie

2.4 Berechnung der Massenkraftmomente am Blatt

Die Ermittlung der am Blatt wirkenden Massenkraftmomente erfordert die Kenntnis der örtlichen Beschleunigungen. Während bei den Einfreiheitsgradbetrachtungen die Zusammenhänge noch sehr einfach sind, bedient man sich in den gekoppelten Fällen besser der Methoden der Relativkinematik. Um Translations- und Rotationstransformationen einheitlich als Matrizenmultiplikationen formulieren zu können werden homogene Koordinaten verwendet, womit sich die Dimension der Vektoren und Matrizen auf vier erhöht. Im folgenden wird das Vorgehen kurz skizziert und dabei besonders auf die Vernachlässigung kleiner Glieder eingegangen. Ganz analog lassen sich auch die örtlichen Anströmgeschwindigkeiten berechnen, welche später zur Ermittlung der Blattluftkräfte benötigt werden.

Ausgangspunkt ist die Bestimmung der absoluten Beschleunigung am Blattaufpunkt S, dem Schwerpunkt des Profilschnitts. Dazu wird unter Verwendung der im Anhang A.3 beschriebenen Transformationen zunächst der Ortsvektor vom Rotormittelpunkt C nach S im nichtdrehenden Rotorsystem aufgestellt (vgl. Anhang A.2):

$$\underline{r}_{CSRo} = \underline{M}_{RoH1} \underline{M}_{H1H2} \underline{M}_{H2S} \underline{M}_{S\beta} \underline{M}_{\beta P} \underline{r}_{PSp} \quad \text{mit} \quad \underline{r}_{PSp} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Da das Ro -Koordinatensystem rein translatorisch mit $V = \text{const.}$ und damit unbeschleunigt bewegt ist, ergibt sich die örtliche Beschleunigung sehr einfach durch Ableiten der einzelnen Komponenten des Ortsvektors, wobei zur Berücksichtigung der Gewichtskraft noch die entsprechenden Anteile der Erdbeschleunigung g hinzugefügt werden. Der Winkel α_{Ro} beschreibt die Neigung der Rotorkreisebene und ist in Bild 6.1 definiert.

$$\underline{\ddot{r}}_{CSRo}^g = \underline{\ddot{r}}_{CSRo} + \begin{bmatrix} g \sin \alpha_{Ro} \\ 0 \\ -g \cos \alpha_{Ro} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Der Momentenhebelarm wird als Ortsvektor vom Gelenk P zum Blattaufpunkt S im Ro -System ähnlich wie in Gl. (2.17) jedoch ohne die Verschiebung \underline{M}_{H1H2} formuliert:

$$\underline{r}_{PSRo} = \underline{M}_{RoH1} \underline{M}_{H2S} \underline{M}_{S\beta} \underline{M}_{\beta P} \underline{r}_{PSp} \quad (2.20)$$

Zur Aufspaltung des Gesamtmomentes in die jeweils um die Gelenkachsen wirkenden Komponenten ist schließlich die Beschreibung der Gelenkorientierungen durch Einheitsrichtungsvektoren erforderlich:

$$\underline{e}_{Ro}^{\beta} = \underline{M}_{RoH1} \underline{M}_{H2\xi} \underline{e}_{\xi}^{\beta} \quad \text{mit} \quad \underline{e}_{\xi}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\underline{e}_{Ro}^{\xi} = \underline{M}_{RoH1} \underline{e}_{\xi}^{\xi} \quad \text{mit} \quad \underline{e}_{\xi}^{\xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\underline{e}_{Ro}^{\vartheta} = \underline{M}_{RoH1} \underline{M}_{H2\xi} \underline{M}_{\xi\vartheta-p} \underline{e}_p^{\vartheta} \quad \text{mit} \quad \underline{e}_p^{\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Damit ergeben sich die Massenkraftmomente zu

$$dM^{Masse} = -\underline{e}_{Ro}^{\beta} \cdot (\underline{r}_{PSRo} \times \underline{\ddot{r}}_{CSRo}) dm \quad (2.24)$$

$$dN^{Masse} = -\underline{e}_{Ro}^{\xi} \cdot (\underline{r}_{PSRo} \times \underline{\ddot{r}}_{CSRo}) dm \quad (2.25)$$

$$dL^{Masse} = -\underline{e}_{Ro}^{\vartheta} \cdot (\underline{r}_{PSRo} \times \underline{\ddot{r}}_{CSRo}) dm \quad (2.26)$$

Die dargestellten Vektoroperationen erzeugen zwar verhältnismäßig umfangreiche Ausdrücke, lassen sich aber bequem und vor allem fehlerfrei mit Programmen zur symbolischen Formelverarbeitung ausführen.

Für die in den Kapiteln 4 und 5.1 verwendeten linearen Modelle müssen die Ergebnisse entsprechend vereinfacht werden. Zunächst wird die übliche Linearisierung der Winkelfunktionen $\sin \beta \approx \beta$ und $\cos \beta \approx 1$ etc. für die drei als klein angenommenen Blattwinkel und den Steuerwinkel durchgeführt. Weiter wird berücksichtigt, daß die Blattiefe l_{Bl} immer klein gegenüber dem Rotorradius R ist.

Außerdem werden Produkte "kleiner" Größen gestrichen, wobei derartige Vereinfachungen bei Blattdifferentialgleichungen mit großer Vorsicht anzuwenden sind, siehe dazu die

Anmerkungen in [41]. Das hier angewendete Schema folgt den Ergebnissen in [37] und [38] und geht davon aus, daß die Winkel von einer Größenordnung ε sind, womit ihren zeitlichen Ableitungen unter der Annahme Ω -periodischer Verläufe dann die Größenordnungen $\varepsilon\Omega$ bzw. $\varepsilon\Omega^2$ entsprechen. Von den sich ergebenden Beschleunigungstermen mit Produkten der Form $\varepsilon^n\Omega^m$ werden nur diejenigen mit $n > m$ vernachlässigt, nicht aber Anteile wie z.B. das Coriolismoment $2\beta\dot{\beta}\Omega(r-a)^2dm$. Die verbleibenden nichtlinearen Terme zwingen also ggf. zur Berücksichtigung der stationären (i.a. periodischen) Lösung, vgl. z.B. das Vorgehen bei der gekoppelten Schlag-/Schwenkbewegung in Kap. 5.2.6.

Die Zulässigkeit der angewandten Vereinfachungen konnte durch die in Kap. 5.3 dargestellten Vergleichsrechnungen mit den ungekürzten nichtlinearen Gleichungen abgesichert werden. Die einzelnen sich aus der Integration entlang des Blattes ergebenden Massenkraftmomente sind beim Aufstellen der Differentialgleichungen in den jeweiligen Kapiteln aufgelistet.

2.5 Modellierung der Luftkraftmomente am Blatt

Im folgenden wird die mathematische Modellierung der am Blatt angreifenden Luftkräfte dargestellt. Die Herleitungen beziehen sich dabei primär auf die Schlagbewegung, können aber analog auch auf die beiden anderen Freiheitsgrade angewendet werden. Besondere Aspekte der Modellierung, die sich nur auf die Torsions- oder die Schwenkbewegung beziehen, werden in gesonderten Kapiteln direkt im Zusammenhang mit der Formulierung der jeweiligen Differentialgleichungssysteme behandelt (Kap. 5.1.1 und 5.2.1).

Prinzipiell sind zwei Vorgehensweisen zu unterscheiden. Gelingt es, für die örtlichen Luftkräfte geschlossene analytische Ausdrücke zu formulieren, die in den Zustandsgrößen der Blattbewegungen linear sind, führt die Integration über das Blatt zu linearen Luftkrafttermen in den Differentialgleichungen. In den meisten Fällen können dadurch die Bewegungsgleichungen vollständig linear gehalten werden, was für die späteren Stabilitätsuntersuchungen mit erheblichen Vorteilen verbunden ist (vgl. Kap. 3). Sollen dagegen nichtlineare aerodynamische Effekte berücksichtigt werden, muß numerisch über diskrete Blattstützstellen integriert werden. Es ergeben sich Differentialgleichungen, die sich jeder analytischen Linearisierung entziehen.

2.5.1 Blattelemententheorie mit linearer Aerodynamik

Das klassische Verfahren zur Modellierung der Blattluftkräfte bei Hubschrauberrotoren wird als Blattelemententheorie bezeichnet; die Grundlagen und Voraussetzungen sind in zahlreichen Büchern und Berichten ausführlich beschrieben, siehe z.B. [36], [37], [38], [40]. In Bild 2.10 sind die geometrischen Verhältnisse am Blattelement dargestellt.

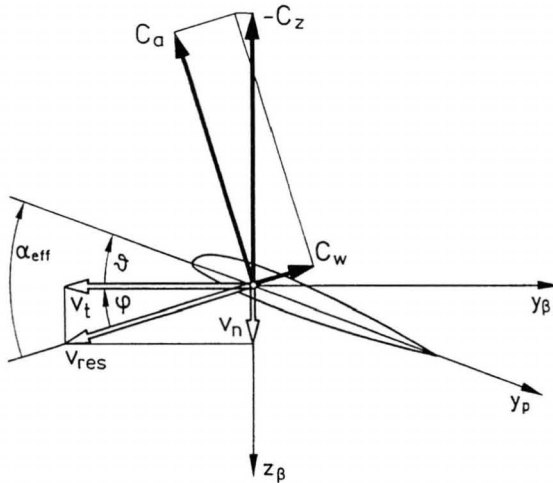


Bild 2.10 Verhältnisse am Blattelement bei der klassischen Blattelemententheorie

Ausgegangen wird von den örtlichen Anströmbedingungen am Profilschnitt. Die Geschwindigkeitskomponenten tangential und normal zum Blatt lauten

$$v_t = \Omega R [x + \mu \sin \psi] \quad (2.27)$$

$$v_n = \Omega R \left[\delta - \frac{\dot{\beta}}{\Omega} (x - a/R) - \mu \beta \cos \psi \right] . \quad (2.28)$$

Unter der Voraussetzung $v_n \ll v_t$, die insbesondere für den entlasteten, tangential angeströmten Rotor mit $\delta = 0$ erfüllt ist, sind folgende Näherungen zulässig:

$$\begin{aligned} \alpha_{eff} &\approx \vartheta + \varphi & \text{mit } \vartheta &= \vartheta_{St} + \vartheta_1 x \\ & & \text{und } \varphi &= \frac{v_n}{v_t} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$v_{res} \approx v_t \quad (2.30)$$

$$-C_z \approx C_a \quad (2.31)$$

Dabei setzt sich der örtliche Einstellwinkel ϑ aus dem an der Blattwurzel eingesteuerten Winkel ϑ_{st} und der ggf. berücksichtigten linearen Verwindung $\vartheta_l x$ zusammen (zur Definition von ϑ_l vgl. auch Bild 4.1). Setzt man ferner als Zusammenhang zwischen Anstellwinkel und Auftriebsbeiwert

$$C_a = C_{a\alpha} \alpha_{eff} \quad (2.32)$$

ergibt sich als differentielles Luftkraftmoment um das Schlaggelenk

$$dM^{Luft} = \frac{\rho}{2} C_{a\alpha} l_B R^2 \alpha_{eff} v_t^2 \left(x - \frac{a}{R}\right) dx \quad (2.33)$$

Die Integration entlang des Blattes beschränkt sich auf den aerodynamisch wirksamen Blattabschnitt. Die untere Grenze, hier $A = 0.25$, entspricht dabei dem geometrischen Beginn des Profils, für das aerodynamische Blattende B wird zur Berücksichtigung des Randabfalls i. a. ein Wert etwas kleiner als eins gesetzt. In [36] oder [38] finden sich Angaben über die Abhängigkeit dieser Größe vom Rotorschub. Für den entlasteten im Mittel schubfreien Rotor gilt danach $B = 1$. Durch Ausmultiplizieren des Integranden und Ausklammern der konstanten Anteile ergeben sich im Luftkraftmoment die sogenannten Blattintegrale, die sich sofort einzeln lösen lassen:

$$D_n = \int_A^B x^{n-1} dx = \left[\frac{1}{n} x^n \right]_A^B \quad (2.34)$$

Führt man noch die Abkürzung

$$C_n = D_n - \frac{a}{R} D_{n-1} \quad (2.35)$$

ein, läßt sich das Luftkraftmoment sehr kompakt schreiben als

$$M^{L_{\text{eff}}} = \frac{\rho}{2} C_{a\alpha} I_{Bl} R^4 \Omega^2 \left\{ - \left[(C_4 - \frac{a}{R} C_3) + (C_3 - \frac{a}{R} C_2) \mu \sin \psi \right] \dot{\beta} / \Omega \right. \\
- \left[C_3 \mu \cos \psi + C_2 \mu^2 \cos \psi \sin \psi \right] \beta \\
+ \left[C_5 + 2C_4 \mu \sin \psi + C_3 \mu^2 \sin^2 \psi \right] \vartheta_1 \\
+ \left[C_4 + 2C_3 \mu \sin \psi + C_2 \mu^2 \sin^2 \psi \right] \vartheta_{St} \\
+ \left[C_3 + C_2 \mu \sin \psi \right] \delta \left. \right\} \quad (2.36)$$

2.5.2 Analytische Berücksichtigung der Rückanströmung

Betrachtet man Gl. (2.27), wird deutlich, daß das Rotorblatt im Bereich $180^\circ < \psi < 360^\circ$ unter negativem v_t , also über die Profilhinterkante angeströmt werden kann. Der Bereich der Rotorkreisscheibe, in dem Rückanströmung auftritt, wird durch einen Kreis mit dem Durchmesser μR und dem Mittelpunkt bei $\psi = 270^\circ$, $r = \mu R/2$ beschrieben (vgl. auch Bild 2.13). Während beim klassischen Hubschrauber mit Fortschrittsgraden nicht über $\mu = 0.4$ das Rückanströmgebiet vernachlässigbar klein bleibt, wächst es mit Absenken der Rotordrehzahl erheblich an und umfaßt im Grenzfall $\mu \rightarrow \infty$ die gesamte linke Rotorhälfte.

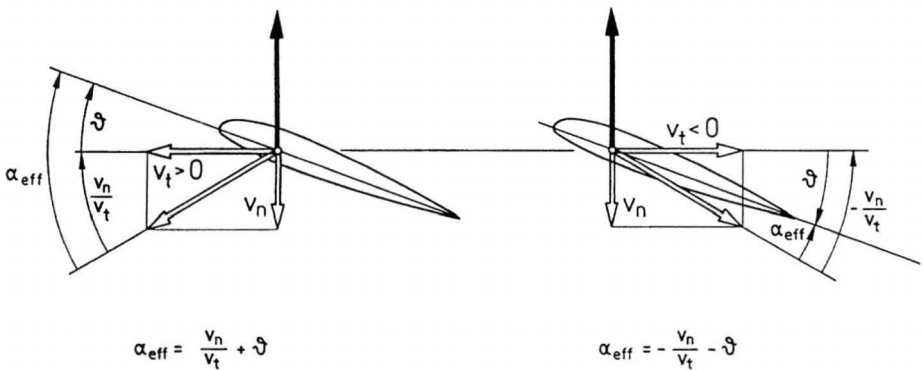


Bild 2.11 Anströmbedingungen am Blattelement bei Rückanströmung

In Bild 2.11 werden die Anströmbedingungen bei Normal- und Rückanströmung verglichen. Es wird sofort deutlich, daß α_{eff} bei negativem v_t nach Gl. (2.29) das falsche

Vorzeichen besitzt. Damit weist aber der örtliche Auftrieb ggf. sogar in die physikalisch falsche Richtung und verursacht einen entsprechend großen Fehler im Blattmoment.

Die Werte von C_{aa} unterscheiden sich für Normal- und Rückanströmung nur sehr wenig, so daß die Verwendung desselben Wertes für beide Fälle nur einen geringen Fehler verursacht. Damit ist die Berücksichtigung der Rückanströmung durch einfaches "Umschalten" des α_{eff} -Vorzeichens möglich.

In verschiedenen Quellen wie z.B. [37], [40] oder [82] wird beschrieben, wie die Rotorkreis-scheibe in Gebiete mit normaler, gemischter oder vollständiger Rückanströmung aufzuteilen und das Vorzeichen jeweils entsprechend anzupassen ist. Im Fall der gemischten, also teilweise normalen und teilweise rückwärtigen, Anströmung müssen die Blattintegrale dazu aufgespalten und abschnittsweise berechnet werden:

$$M^{Luft} = \int_A^B \dots dx = - \int_A^{-\mu \sin \psi} \dots dx + \int_{-\mu \sin \psi}^B \dots dx \quad (2.37)$$

Davon abweichend wird in dieser Arbeit der Vorzeichenwechsel direkt in die Formulierung von α_{eff} eingearbeitet. Der sich im Integranden des Luftkraftmomentes dabei ergebende Betragsterm läßt sich durch eine geschickt erweiterte Definition der klassischen Blattintegrale berücksichtigen. Der effektive Anstellwinkel hat in diesem Fall die Form

$$\alpha_{eff} = \frac{v_n + \partial v_t}{|v_t|} \quad (2.38)$$

und beschreibt bei Rückanströmung die Anstellung der *Profilhinterkante* gegenüber der aktuellen Anströmrichtung. Als analytische Lösungen der neu einzuführenden Blattintegrale erhält man stetige, von μ abhängige periodische Funktionen in ψ :

$$\begin{aligned} D_n^R(\psi) &= \int_A^B x^{n-2} |x + \mu \sin \psi| dx \\ &= \left[\left\{ \frac{1}{n} x^n + \frac{\mu \sin \psi}{n-1} x^{n-1} + \frac{(-\mu \sin \psi)^n}{n(n-1)} \right\} \text{sgn}(x + \mu \sin \psi) \right]_A^B \quad \text{für } n > 1 \\ &= \left[\left\{ x + \mu \sin \psi \ln \left| \frac{-x}{\mu \sin \psi} \right| + \mu \sin \psi \right\} \text{sgn}(x + \mu \sin \psi) \right]_A^B \quad \text{für } n = 1, \mu \sin \psi \neq 0 \\ &= \left[|x| \right]_A^B \quad \text{für } n = 1, \mu \sin \psi = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Diese gehen für $\mu = 0$ in die bekannten, konstanten Blattintegrale über. Bild 2.12 zeigt die Verläufe der benötigten ersten fünf Integrale für verschiedene Fortschrittsgrade. Das Schlagmoment schreibt sich damit sogar noch etwas kürzer, da ein Teil der Periodizitäten nunmehr implizit in den Blattintegralen auftritt. Mit der Abkürzung analog zu Gl. (2.35)

$$C_n^R = D_n^R - \frac{a}{R} D_{n-1}^R \quad (2.40)$$

erhält man schließlich das Schlagmoment unter Berücksichtigung der Rückanströmung zu

$$M^{Luf} = \frac{\rho}{2} C_{\alpha\alpha} I_{Bl} R^4 \Omega^2 \left\{ \begin{aligned} & - \left[C_4^R - \frac{a}{R} C_3^R \right] \dot{\beta} / \Omega \\ & - \left[C_3^R \mu \cos \psi \right] \beta \\ & + \left[C_5^R + C_4^R \mu \sin \psi \right] \vartheta_1 \\ & + \left[C_4^R + C_3^R \mu \sin \psi \right] \vartheta_{St} \\ & + \left[C_3^R \right] \delta \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

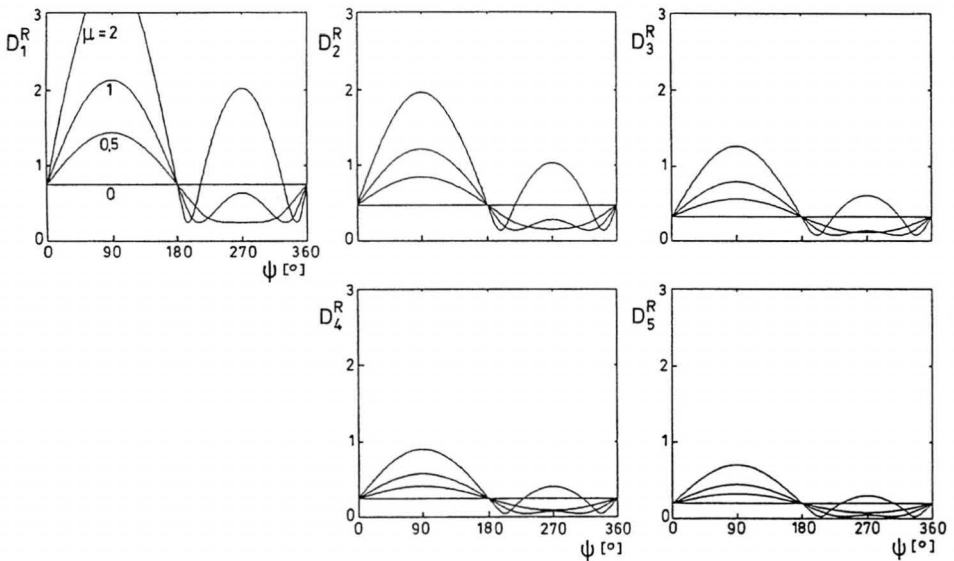


Bild 2.12 Periodische Blattintegrale zur Berücksichtigung der Rückanströmung

2.5.3 Nichtlineares, numerisches Aerodynamikmodell zur Berücksichtigung von Rückanströmung und Abreißen

Die im letzten Kapitel getroffenen Annahmen zur Geometrie der Blattanströmung, Gl. (2.29) bis (2.31), und zum Zusammenhang zwischen Anstellwinkel und Auftrieb, Gl. (2.32), vereinfachen die Modellierung der Luftkräfte erheblich und halten insbesondere die Abhängigkeiten von den Zustandsgrößen linear. Diese Näherungen sind jedoch nur für kleine Winkel hinreichend genau.

Zum einen müssen die entsprechenden Winkelfunktionen berücksichtigt werden, sobald normale und tangentielle Anströmkomponenten von gleicher Größenordnung sind. Zum anderen gilt die lineare Beziehung zwischen Anstellwinkel und Luftkraft nur für anliegende Strömung mit Anstellwinkeln nicht größer als ca. $\pm 13^\circ$. Es ergeben sich ferner für die Anströmung über die i.a. scharfe Profilhinterkante andere Auftriebsgradienten als bei normaler Anströmung, und schließlich ist C_{ax} auch von der MACH-Zahl abhängig, was bei Umfangsgeschwindigkeiten von $\Omega R = 250 \text{ m/s}$ entsprechend $Ma = 0.74$ schon deutlichen Einfluß zeigt.

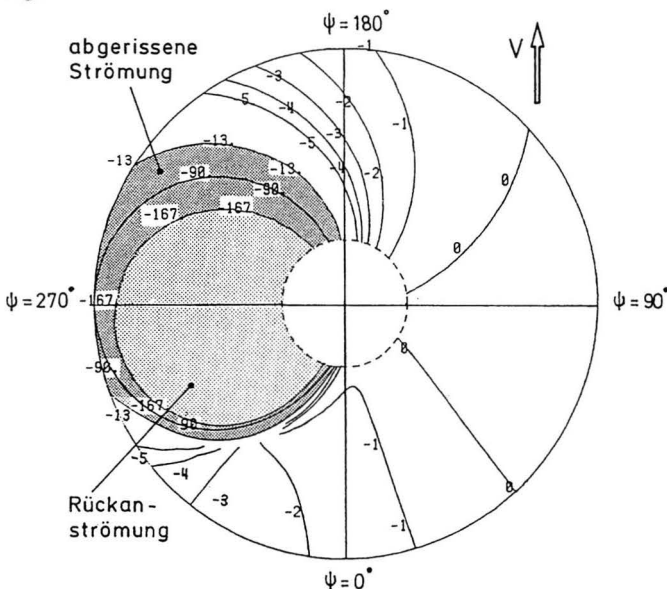


Bild 2.13 Anstellwinkelverteilung über der Rotorkreisscheibe mit Abreiß- und Rückanströmgebieten bei $\mu = 1$ (Linien gleicher Anstellwinkel in Grad)

Bild 2.13 zeigt die Anstellwinkelverteilung über der Rotorkreisscheibe bei einem Fortschrittsgrad von $\mu = 1$ für einen tangential angeströmten, ungesteuerten Rotor ($\vartheta_0 = \vartheta_c = \vartheta_s = 0$). Die gerasterten Gebiete kennzeichnen, wo mit abgerissener und wo mit Rückanströmung zu rechnen ist. Will man die in diesen Gebieten auftretenden Fehler bei der Ermittlung der Luftkräfte verringern, kann man gemessene Profilbeiwerte verwenden. Im Anhang A.9 sind Ergebnisse derartiger Messungen in Form von 360°-Profilpolaren zusammengestellt; zum Vergleich sind auch die in Kap. 2.5.2 verwendeten analytischen Näherungsansätze eingetragen.

Zur Berechnung des Luftkraftmomentes werden zunächst diskrete Stützstellen entlang des Blattes definiert, und an diesen die örtlichen Anströmbedingungen ermittelt. Da man schon mit Verwendung der Meßwerte die Linearität aufgibt, bedeutet es keinen weiteren Nachteil, auch für die geometrischen Beziehungen die genauen, nichtlinearen Gleichungen anzusetzen. Es ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\alpha_{eff} &= \vartheta + \varphi^* \quad \text{mit} \quad \varphi^* = \arctan \frac{v_n}{v_t} && \text{für } v_t > 0 \\ &= \arctan \frac{v_n}{v_t} + \pi \operatorname{sgn} v_n && \text{für } v_t < 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} v_n && \text{für } v_t = 0\end{aligned} \quad (2.42)$$

$$v_{res} = \sqrt{v_n^2 + v_t^2} \quad (2.43)$$

$$\operatorname{Ma} = \frac{v_{res}}{a_{Schall}} \quad (2.44)$$

Der effektive Anstellwinkel beschreibt hier grundsätzlich die Anstellung der Profilvorderkante gegenüber der Anströmrichtung, d.h. er nimmt bei Rückanströmung Werte außerhalb des Bereichs $\pm \pi/2$ an. Zu diesen Anströmbedingungen werden die entsprechenden Luftkraftbeiwerte ermittelt; man kann dabei entweder zwischen tabellierten Meßwerten interpolieren oder analytische Funktionen auswerten, die abschnittsweise an Meßergebnisse angepaßt wurden. Für das Luftkraftmoment erhält man in diesem Fall

$$dM^{Luft} = -\frac{\rho}{2} v_{res}^2 I_{Bl} R^2 C_z \left(x - \frac{a}{R}\right) dx \quad (2.45)$$

$$\text{mit} \quad -C_z = C_a(\alpha_{eff}, \operatorname{Ma}) \cos \varphi^* + C_w(\alpha_{eff}, \operatorname{Ma}) \sin \varphi^* \quad (2.46)$$

Die Integration entlang des Blattes erfolgt numerisch nach dem Verfahren von SIMPSON. Insbesondere bei gekoppelten Betrachtungen wie z.B. in Kap. 5.3 finden bei der Bestimmung der örtlichen Geschwindigkeitskomponenten wieder die Methoden der Relativkinematik Anwendung (analog zur Berechnung der Beschleunigungen in Kap. 2.4), da die Beziehungen deutlich komplizierter werden als die linearisierten Ansätze nach Gl. (2.27) bzw. (2.28).

3 Verfahren zur Stabilitätsanalyse von parametererregten Systemen

Wie schon die Herleitungen der Luftkraftmomente im letzten Kapitel angedeutet haben, besitzen die Differentialgleichungen zur Beschreibung der Blattbewegungen periodische Koeffizienten. Bei Berücksichtigung bestimmter Massenkraftkopplungen oder Verwendung verfeinerter Aerodynamikmodelle sind sie zudem noch nichtlinear.

Bei der Untersuchung von Hubschrauberrotoren kann die Behandlung periodischer Gleichungen oft umgangen werden. Zum einen können durch Transformation der in Einzelblattkoordinaten formulierten Differentialgleichungen auf Mehrblattkoordinaten für viele Flugzustände die Periodizitäten vollständig beseitigt werden. Zum anderen lassen sich die dann ggf. noch verbleibenden, höherharmonischen Anteile in guter Näherung durch ihre Mittelwerte ersetzen. In [78] wird dieses Vorgehen für die Schlagbewegung untersucht. Die Ergebnisse zeigen, daß bei Fortschrittsgraden bis zu $\mu = 0.5$ die Fehler in den berechneten Frequenzen und Dämpfungen hinreichend klein bleiben.

Ferner ist es üblich, bestimmte lineare Näherungen einzuführen (vgl. Kap. 2.5.1) oder zumindest die Differentialgleichungen so zu formulieren, daß sie analytisch linearisiert werden können. Man erhält damit lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten, auf die alle klassischen Eigenwertverfahren zur Stabilitätsanalyse anwendbar sind. Auch die wichtigsten Methoden der Regelungstechnik lassen sich nur unter dieser Voraussetzung einsetzen.

Während für einen Teil der hier anzustellenden Untersuchungen die Gleichungen durchaus linear gehalten werden können, versagen die erwähnten Methoden zur Beseitigung der periodischen Koeffizienten bei Untersuchungen zur Stillsetzung vollständig, siehe dazu auch Kap. 4.3.2.1. Erst bei Modellierung aller Periodizitäten zeigen sich eben jene Effekte, die die besonderen Stabilitätsprobleme bei Stopp-Rotoren verursachen.

Zur Behandlung periodischer Differentialgleichungen existieren die unterschiedlichsten Verfahren. Einige von ihnen erlauben die Bestimmung der vollständigen Lösungen, andere ermöglichen nur die Berechnung der Stabilität oder begnügen sich sogar mit der Beschreibung der Stabilitätsgrenzen in Abhängigkeit von bestimmten Systemparametern.

Übersichten zu den wichtigsten Methoden finden sich in [60], [62] und [63]. Viele Arbeiten untersuchen einen besonderen Gleichungstyp, nämlich die sogenannte HILLSche oder deren Spezialfälle, die MATHIEUsche und MEISSNERSche Differentialgleichung. Grundlegende Arbeiten zur MATHIEUschen Gleichung gehen auf INCE und STRUTT, [74], [75] zurück. Mit anderen speziellen HILLSchen Differentialgleichungen haben sich z.B. die Autoren von [70], [71] und [72] beschäftigt.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + K(t)\Omega^2 x &= 0 & \text{HILL: } K(t) &= K(t+T) & (3.1) \\ \text{MATHIEU: } K(t) &= K_0 + K_c \cos \Omega t \\ \text{MEISSNER: } K(t) &= K_0 + K_s \quad 0 < \text{mod}(t, T) < t_s \\ &= K_0 - K_s \quad t_s < \text{mod}(t, T) < T \end{aligned}$$

Die meisten der analytischen Verfahren, die mit Reihenentwicklungen für die Stabilitätsgrenzen arbeiten, liefern bei einer handhabbaren Anzahl an Reihengliedern nur für schwache Periodizitäten genaue Ergebnisse. Außerdem müssen diese Verfahren jeweils an die Struktur der Differentialgleichung angepaßt werden, oder es muß zunächst auf die HILLSche Form transformiert und die Periodizität in eine FOURIER-Reihe entwickelt werden.

Bewährt hat sich dagegen als numerisches Verfahren die sogenannte FLOQUET-Theorie, welche auf alle linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung direkt anwendbar ist. Ausführliche Herleitungen zur FLOQUET-Theorie finden sich z.B. in [56] und [57]; eine Anzahl von Veröffentlichungen, wie [55], [58], [59], [61], [67], und [68], befaßt sich speziell mit ihrer Anwendung auf Stabilitätsprobleme bei Hubschraubern. Auch in der vorliegenden Arbeit stellt die FLOQUET-Theorie das wichtigste Werkzeug zur Stabilitätsuntersuchung dar, und wird deshalb im folgenden Kapitel kurz skizziert. Es folgen Betrachtungen zur Behandlung nichtlinearer periodischer Systeme, wobei gezeigt wird, wie sich der FLOQUET-Formalismus auch zur Untersuchung von periodischen Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen einsetzen läßt.

3.1 Die FLOQUET-Theorie für lineare Gleichungen

Ausgegangen wird von dem auf Zustandsraumdarstellung transformierten homogenen Differentialgleichungssystem erster Ordnung in k Zustandsgrößen:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) \quad \text{mit} \quad \underline{A}(t+T) = \underline{A}(t) \quad . \quad (3.2)$$

Sind k linear unabhängige Lösungen dieses Differentialgleichungssystems bekannt, lassen sich diese in einer Fundamentalmatrix zusammenfassen. Mit ihr läßt sich jede Lösung darstellen als

$$\underline{x}(t) = \underline{\Psi}(t)\underline{c} \quad (3.3)$$

Damit erfüllt jede Fundamentalmatrix aber auch die Gleichung

$$\underline{\dot{\Psi}}(t) = \underline{A}(t)\underline{\Psi}(t) \quad (3.4)$$

Hier interessiert besonders jene Fundamentalmatrix $\underline{\Psi}(t) = \underline{\Phi}(t)$, für die gilt

$$\underline{\Phi}(t_0) = \underline{I} \quad (3.5)$$

Sie heißt Transitionsmatrix, da mit ihr der Anfangszustand $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ in den Systemzustand zum Zeitpunkt t "übergeht":

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}_0 \quad (3.6)$$

Auch $\underline{\Phi}(t+T)$ ist eine Fundamentalmatrix, denn sie erfüllt wegen der Periodizität von \underline{A} ebenfalls Gl. (3.4). Damit kann sie sich von $\underline{\Phi}(t)$ nur durch eine konstante Matrix $\underline{\Phi}_*$ unterscheiden:

$$\underline{\Phi}(t+T) = \underline{\Phi}(t)\underline{\Phi}_* \quad (3.7)$$

Diese ergibt sich durch Einsetzen des Zeitpunktes $t = t_0$ mit Gl. (3.5) sofort zu

$$\underline{\Phi}_* = \underline{\Phi}(t_0 + T) \quad (3.8)$$

und wird als Monodromiematrix bezeichnet. Durch Anwenden von Gl. (3.7) über n Perioden erhält man

$$\underline{\Phi}(t+nT) = \underline{\Phi}(t)\underline{\Phi}_*^n \quad (3.9)$$

womit die Lösung der Differentialgleichung für beliebige Zeiten folgende Form annimmt:

$$\underline{x}(t+nT) = \underline{\Phi}(t)\underline{\Phi}_*^n \underline{x}_0 \quad (3.10)$$

Schon hier wird deutlich, daß die Stabilität für $n \rightarrow \infty$ allein von den Eigenschaften der "Abbildung" $\underline{\Phi}_*$ abhängt. Für die Eigenwerte der Monodromiematrix, die sogenannten charakteristischen Multiplikatoren μ_i , lassen sich Bedingungen angeben, unter denen die Lösungen der Differentialgleichung stabil sind (vgl. Anhang A.8).

Die Matrix $\underline{\Phi}_*$ läßt sich durch numerische Integration verhältnismäßig einfach ermitteln. Bild 3.1 veranschaulicht das prinzipielle Vorgehen am Beispiel einer MATHIEUSchen Differentialgleichung mit Dämpfung ($K_0 = K_c = 5$, $D = 0.1$):

$$\ddot{x} + 2D\Omega\dot{x} + (K_0 + K_c \cos \Omega t)\Omega^2 x = 0 \quad (3.11)$$

bzw. in Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(K_0 + K_c \cos \Omega t)\Omega^2 & -2D\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Schreibt man Gl. (3.6) für $t = t_0 + T$ und setzt als Anfangszustände \underline{x}_0 die beiden Einheitsrichtungsvektoren, erhält man als Berechnungsvorschrift für die Monodromiematrix

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_0 + T) &= \underline{\Phi}(t_0 + T)\underline{x}_0 \\ \begin{bmatrix} \underline{x}^I(t_0 + T); \underline{x}^{II}(t_0 + T) \end{bmatrix} &= \underline{\Phi}(t_0 + T) \underline{I} \\ \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_*^I; \underline{\Phi}_*^{II} \end{bmatrix} &= \underline{\Phi}_* \end{aligned} \quad (3.13)$$

Somit sind die Zustandsvektoren ausgehend vom jeweiligen Einheitsvektor wie z.B.

$$\underline{x}_0^I = \underline{e}^I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

einzelnen oder simultan über eine Erregerperiode zu den entsprechenden Spaltenvektoren der Monodromiematrix aufzuintegrieren:

$$\underline{\Phi}_*^I = \underline{x}^I(t_0 + T) \quad (3.15)$$

In [64] werden verschiedene numerische Verfahren verglichen und bezüglich ihrer Genauigkeit und Effizienz bewertet.

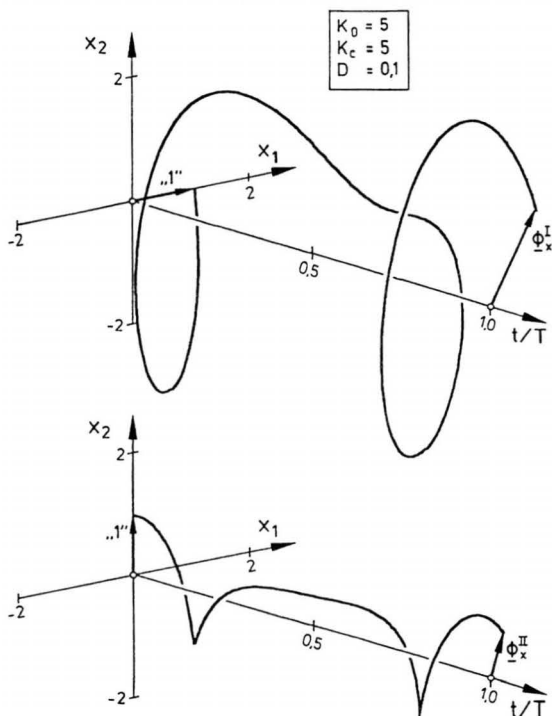


Bild 3.1 Ermittlung der Monodromiematrix durch numerische Integration

In dieser Arbeit soll die Stabilität jedoch nicht durch die charakteristischen Multiplikatoren beschrieben werden. Wesentlich anschaulicher ist es, zunächst den Zusammenhang zwischen dem periodischen und dem zugehörigen System mit konstanten Koeffizienten herzustellen. An letzterem lassen sich in bekannter Weise die physikalisch relevanten Parameter Frequenz und Dämpfung untersuchen. Dazu wird der Satz von FLOQUET-LJAPUNOW herangezogen, wonach sich die Transitionsmatrix mit der periodischen Matrix $\underline{Z}(t) = \underline{Z}(t+T)$ und der konstanten Matrix \underline{R} entsprechend der Beziehung

$$\underline{\Phi}(t) = \underline{Z}(t)e^{(t-t_0)\underline{R}} \quad (3.16)$$

zerlegen läßt. Dabei gilt wegen Gl. (3.5) für $\underline{Z}(t)$ insbesondere noch

$$\underline{Z}(t_0) = \underline{I} \quad (3.17)$$

Für die an die Anfangsbedingungen angepaßte Lösung der Differentialgleichung folgt sofort

$$\underline{x}(t) = \underline{Z}(t) e^{(t-t_0)\underline{R}} \underline{x}_0 \quad (3.18)$$

Diese setzt sich demnach zusammen aus der Lösung des zugehörigen Systems mit konstanten Koeffizienten

$$\underline{\dot{y}}(t) = \underline{R} \underline{y}(t) \quad (3.19)$$

$$\underline{y}(t) = e^{(t-t_0)\underline{R}} \underline{y}_0 \quad \text{mit: } \underline{y}_0 = \underline{x}_0 \quad (3.20)$$

und der periodischen Koordinatentransformation

$$\underline{x}(t) = \underline{Z}(t) \underline{y}(t) \quad (3.21)$$

Da $\underline{Z}(t)$ für alle Zeiten beschränkt bleibt, hängt die Stabilität nur noch von den Eigenschaften des zugehörigen Systems mit konstanten Koeffizienten ab. Gesucht sind daher die Eigenwerte λ_i der konstanten Systemmatrix \underline{R} . Der Zusammenhang zwischen \underline{R} und der Monodromiematrix $\underline{\Phi}_*$ ergibt sich durch Auswerten von Gl. (3.16) zum Zeitpunkt $t = t_0 + T$ unter Berücksichtigung der besonderen Eigenschaften der Matrizen $\underline{\Phi}(t)$ und $\underline{Z}(t)$:

$$\underline{\Phi}_* = e^{T\underline{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{R} = \frac{1}{T} \ln \underline{\Phi}_* \quad (3.22)$$

Da zu beiden Matrizen die selben Eigenvektoren gehören, erhält man z.B. durch Modaltransformation für die Eigenwerte völlig analog

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln \mu_i \quad (3.23)$$

Für die Real- und Imaginärteile der i.a. komplexen Eigenwerte gilt damit

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) = \frac{1}{T} \ln |\mu_i| \quad (3.24)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda_i) = \frac{1}{T} \left[\arctan \frac{\operatorname{Im}(\mu_i)}{\operatorname{Re}(\mu_i)} \pm 2n\pi \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

Sie werden auch als charakteristische Exponenten bezeichnet und beschreiben in bekannter Weise Dämpfung und Frequenz der Lösungen. Das System ist demnach asymptotisch stabil, wenn für alle Realteile $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ gilt.

Aus Gl. (3.25) wird deutlich, daß die Eigenfrequenzen des zugehörigen Systems mit konstanten Koeffizienten wegen der Mehrdeutigkeit der arctan-Funktion nur bis auf ein ganzes Vielfaches der Erregerfrequenz $\Omega = 2\pi/T$ zu berechnen sind. Dennoch läßt sich in vielen Fällen die physikalisch "richtige" Frequenz festlegen. Sind die Periodizitäten z.B. Folge der Formulierung der Bewegungsgleichungen in rotierenden Koordinaten, läßt sich durch Abgleich der berechneten Transformation $\underline{Z}(t)$ mit der physikalischen Koordinatendrehung auf die "richtige" Frequenz schließen. Bei Einfreiheitsgradproblemen ist es ferner möglich, mit Hilfe von Stabilitätskarten quasi durch stufenloses Ausblenden der Periodizitäten eine Verbindung zu den bekannten Eigenfrequenzen des dann konstanten Systems herzustellen, siehe dazu auch Kap. 4.3.1.

Im Anhang A.8 findet sich der gesamte FLOQUET-Formalismus noch einmal zusammengefaßt, wobei parallel dazu die entsprechenden Beziehungen für konstante Systeme aufgelistet sind. Auf die Behandlung mehrfacher Eigenwerte wird verzichtet, da derartige Fälle bei den hier betrachteten Systemen nicht auftreten. Die damit verbundenen Besonderheiten werden jedoch z.B. in [56] und [57] ausführlich diskutiert.

3.2 Die Behandlung nichtlinearer Gleichungen

Müssen die Differentialgleichungen zur möglichst genauen Modellierung bestimmter physikalischer Effekte in den Zustandsgrößen nichtlinear formuliert werden, läßt sich die FLOQUET-Theorie in der beschriebenen Form nicht anwenden. Auch kann die Behandlung der Stabilität in diesen Fällen natürlich nicht mehr unabhängig von der jeweiligen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erfolgen. Die Kenntnis des periodischen, hier als partikuläre Lösung bezeichneten stationären "Betriebszustandes" ist vielmehr Voraussetzung für die anschließende Stabilitätsuntersuchung. Im folgenden sei $\underline{x}(t)$ der aktuelle Systemzustand, der sich aus der interessierenden Lösung $\underline{x}_{part}(t)$ und den für die Stabilität relevanten Abweichungen $\Delta \underline{x}(t)$ zusammensetzt. Die zu betrachtenden Systeme haben die Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t) \quad (3.26)$$

In Bild 3.2 sind einige wichtige Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Systeme zusammengestellt, auf die im folgenden anhand sehr einfacher Beispiele eingegangen werden

soll. Die dazu durchgeführten Rechnungen hatten insbesondere auch das Ziel, die entwickelten Rechenprogramme bezüglich Rechengenauigkeit und -geschwindigkeit mit anderen, möglichst analytischen Verfahren zu vergleichen.

Betrachtet werden die beiden nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\ddot{x} + 2D\Omega\dot{x} + K\Omega^2x^3 = u\Omega^2\cos\Omega t \quad (3.27)$$

$$\ddot{x} + 2D\Omega\dot{x} + (K_0 + K_c\cos\Omega t)\Omega^2x^3 = u\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) \quad (3.28)$$

Störfunktion und Parametererregung besitzen hier dieselbe (Grund-)Frequenz, was bei Hubschrauberproblemen i.a. der Fall ist. Wie im Verlauf der Betrachtungen deutlich werden wird, kann im nichtlinearen Fall zwischen konstanten und periodischen Systemen nicht mehr streng unterschieden werden, denn die von einer Störfunktion erzwungene periodische Lösung beeinflusst die Stabilität in der selben Weise, wie dies auch durch die Parametererregung geschieht (vgl. Kap. 3.2.2). Eine umfassende Darstellung dieses Themenkreises findet man z.B. in [57].

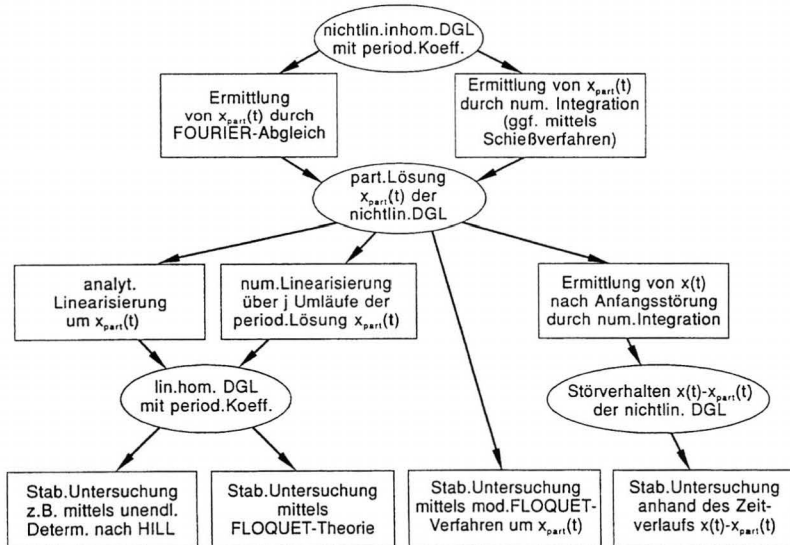


Bild 3.2 Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer periodischer Systeme

3.2.1 Die Bestimmung der partikulären Lösung

Zur Ermittlung der partikulären Lösung kommen bei Hubschrauberuntersuchungen fast ausschließlich zwei Verfahren zur Anwendung. Bei dem als FOURIER-Abgleich bezeichneten Verfahren wird die Lösung durch eine abgebrochene FOURIER-Reihe angenähert. Der Ansatz wird in die Differentialgleichung eingesetzt und die FOURIER-Koeffizienten durch Abgleich einer entsprechenden Anzahl von \sin - und \cos -Gliedern bestimmt. Man erhält ein nichtlineares Gleichungssystem, welches sich nur für sehr einfache Systeme noch analytisch lösen läßt. Für Untersuchungen bei kleinen Fortschrittsgraden wird oft sogar nur bis zur ersten Harmonischen angesetzt; dieses Vorgehen entspricht dann der sogenannten harmonischen Balance.

Beim zweiten Verfahren wird die Differentialgleichung numerisch aufintegriert. Dies bietet sich insbesondere bei komplizierteren Nichtlinearitäten an, da keinerlei Einschränkungen bezüglich der Struktur der Gleichung bestehen. Entweder wird von beliebigen (aber im Einzugsbereich der interessierenden Lösung liegenden) Anfangsbedingungen ausgegangen und die Integration so lange fortgesetzt, bis sich nach Abklingen der Einschwingvorgänge der Zeitverlauf der Zustandsgrößen in Form der partikulären Lösung reproduziert. Dazu werden die Verläufe aufeinanderfolgender Perioden jeweils miteinander verglichen, und die Rechnung wird abgebrochen, sobald die Abweichungen vorgegebene Fehler-schranken unterschreiten.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Integration zu Beginn der Erregerperiode jeweils neu anzusetzen. Die Anfangsbedingungen werden dabei mittels eines geeigneten Iterationsverfahrens so lange angepaßt, bis die Zustandsgrößen zu Beginn und am Ende der Erregerperiode übereinstimmen, d.h. die Schließungsbedingung erfüllt ist. Mit diesem sogenannten Einfachschießverfahren lassen sich schwach gedämpfte oder sogar leicht instabile periodische Lösungen effizient bestimmen. Unterteilt man zusätzlich die Erregerperiode in kurze Intervalle und paßt die End- und Anfangswerte der jeweils aufeinander folgenden Abschnitte iterativ aneinander an, lassen sich noch wesentlich instabilere Lösungen ermitteln.

Anhand von [Bild 3.3](#) läßt sich der Rechenzeitaufwand für die Bestimmung einer periodischen Lösung zu Gl. (3.27) abschätzen. Verglichen werden die kontinuierliche numerische Integration und das periodische Einfachschießen. Zum Abgleich der

Schließungsbedingungen wurde im vorliegenden Beispiel eine NEWTON-Iteration verwendet. Das Abbruchkriterium ist für beide Fälle identisch und folgt formal der Definition der Standardabweichung, indem es die mittlere Abweichung der zeitdiskreten Zustände x von den entsprechenden Werten der jeweils vorangegangenen Periode beschreibt.

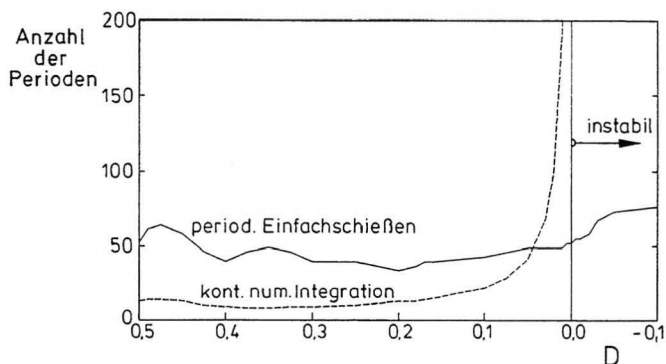


Bild 3.3 Anzahl der Perioden, über die zur Ermittlung einer Lösung von Gl. (3.27) integriert werden muß, um die gewählte Fehlerschranke zu unterschreiten; Vergleich von kontinuierlicher numerischer Integration und periodischem Einfachschießen ($K = 1$, $u = 1$, 360 Schritte pro Periode, Startwerte: $x(t=0) = 1.5$, $\dot{x}(t=0) = 0$, mittlerer Fehler $< 10^{-6}$)

Das Diagramm zeigt, daß für Dämpfungen über $D = 0.04$ mit der kontinuierlichen numerischen Integration die gewählte Fehlerschranke schneller unterschritten wird. Erst bei sehr kleinen oder negativen Dämpfungen zeigt sich das periodische Einfachschießen überlegen. Während die Iteration für die hier auftretenden mit 1Ω periodischen Lösungen noch gute Konvergenzeigenschaften zeigt, ergeben sich für Lösungen mit subharmonischen Anteilen (z.B. bei Gl. (3.28)) deutlich höhere Rechenzeiten. Da die Blattbewegungen in den technisch relevanten Fällen immer ausreichend gedämpft sein müssen, wurde für die weiteren Stabilitätsrechnungen die einfache kontinuierlichen Integration verwendet.

In Bild 3.4 werden Ergebnisse aus dem FOURIER-Abgleich und der numerischen Integration am Beispiel der Differentialgleichungen (3.27) und (3.28) verglichen. Im oberen Fall wurde der harmonischen Balance entsprechend nur die Grundschiwingung angesetzt:

$$x_{part} = x_c \cos \Omega t + x_s \sin \Omega t \quad (3.29)$$

Dennoch zeigen die Ergebnisse gute Übereinstimmung. Im unteren Teil des Bildes wird dagegen deutlich, daß der FOURIER-Abgleich bei starker Parametererregung schnell an seine Grenzen stößt. Trotz der Berücksichtigung von acht Harmonischen, das entspricht 17 FOURIER-Koeffizienten, ist die Nachbildung des numerisch integrierten Verlaufes nur unzureichend. Außerdem ist bei derart vielen Koeffizienten der numerische Aufwand selbst bei so einfachen Differentialgleichungen schon beträchtlich.

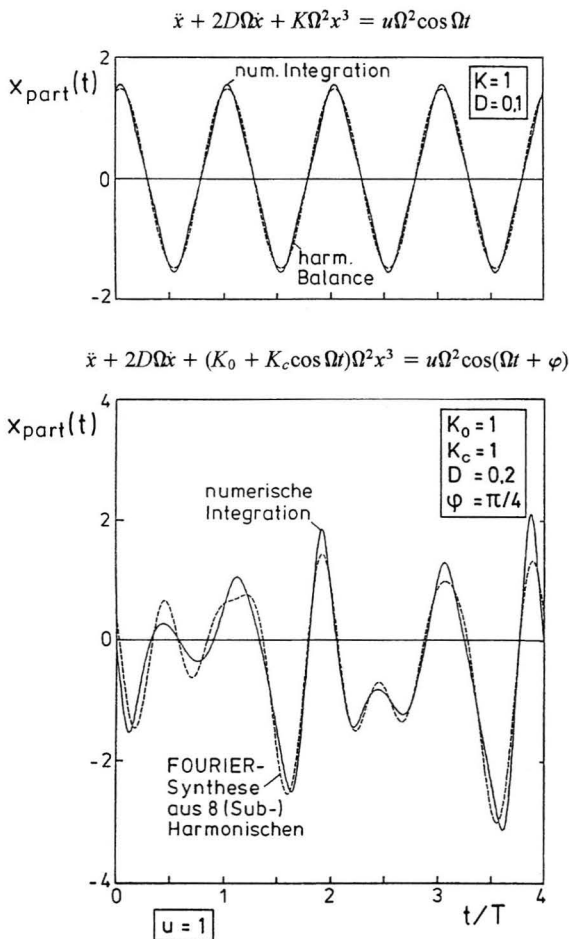


Bild 3.4 Vergleich zwischen FOURIER-Abgleich und numerischer Integration

Man erkennt sofort, daß die Lösung auch subharmonische Anteile enthält. Bei komplizierteren Systemen ist es aber kaum möglich, das Auftreten solcher Anteile vorherzusagen. Im vorliegenden Beispiel wurden Vielfache von $\Omega/4$ angesetzt, da mit dem numerisch integrierten Verlauf auch die FOURIER-Transformierte bekannt war. Bild 3.5 zeigt das auf die Amplitude der Grundschiwingung normierte Spektrum. Es ist offensichtlich, daß die subharmonischen Anteile in diesem Fall nicht vernachlässigt werden dürfen.

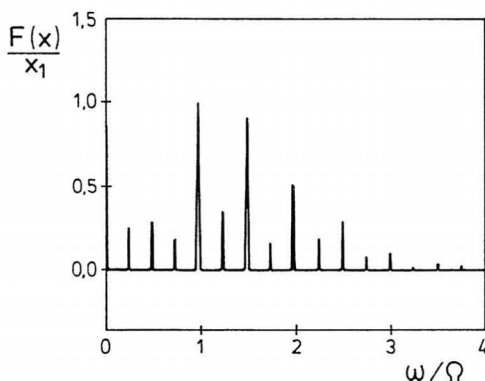


Bild 3.5 FOURIER-Spektrum der partikulären Lösung von Bild 3.4 unten

Ein Vorteil des FOURIER-Abgleichs ist jedoch, daß sich aus dem damit formulierten Gleichungssystem unabhängig von ihrer Stabilität gleichzeitig mehrere Lösungen ergeben. Bei der numerischen Integration muß durch entsprechende Wahl der Anfangsbedingungen gezielt nach einer bestimmten Lösung gesucht werden, was natürlich gewisse Vorkenntnisse voraussetzt. Gl. (3.27) z.B. besitzt für bestimmte Parameter K und D mindestens drei Lösungen, von denen mindestens eine instabil ist. Bild 3.6 zeigt die Amplitude A der partikulären Lösung über der Erregerfrequenz. Die eingezeichnete Lösung 2 ist instabil und durch kontinuierliche numerische Integration nicht darzustellen.

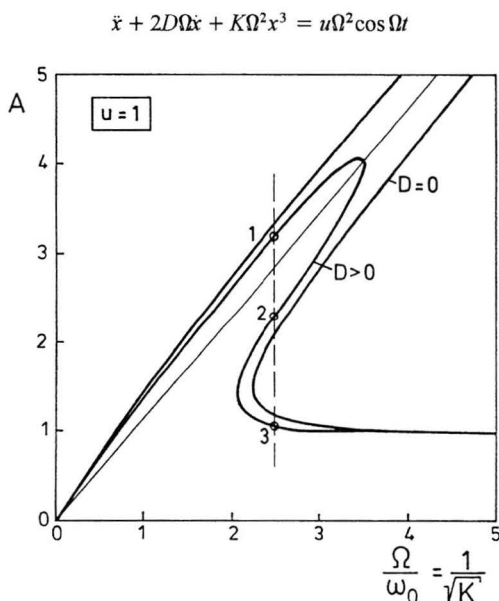


Bild 3.6 Amplitudenfunktion der partikulären Lösung zu Gl. (3.27)

3.2.2 Untersuchung der Stabilität durch Linearisierung

Ziel der Linearisierung ist es, das Verhalten der "kleinen" Störungen $\Delta \underline{x}$ von der bekannten Lösung \underline{x}_{part} durch lineare Differentialgleichungen zu beschreiben. Man bildet die Differenz zwischen gestörter und ungestörter Bewegung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_{part} + \Delta \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}_{part} + \Delta \underline{x}, t) \\ - \dot{\underline{x}}_{part} &= \underline{f}(\underline{x}_{part}, t) \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\underline{x}} \equiv \underline{F}(\Delta \underline{x}, t) \quad (3.30)$$

und entwickelt die Funktion \underline{F} im Punkt $\Delta \underline{x} = \underline{0}$ in eine TAYLOR-Reihe bis zum linearen Glied:

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\Delta \underline{x} = \underline{0}, t) + \underline{F}'(\Delta \underline{x} = \underline{0}, t)\Delta \underline{x} \quad (3.31)$$

Mit der Definition für \underline{F} aus Gl. (3.30) gilt

$$F'_{il}(\Delta \underline{x} = \underline{0}, t) = \left. \frac{\partial F_l(\Delta \underline{x}, t)}{\partial \Delta x_l} \right|_{\Delta \underline{x} = \underline{0}} = \left. \frac{\partial f_l(\underline{x}, t)}{\partial x_l} \right|_{\underline{x} = \underline{x}_{part}} \equiv A_{il}(t) , \quad (3.32)$$

womit man schließlich die bekannte Form der homogenen linearen Differentialgleichung erhält:

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \Delta \underline{x} . \quad (3.33)$$

Anhand dieser linearen Variationsgleichung läßt sich die Stabilität der nichtlinearen Differentialgleichung unter Anwendung der für lineare Systeme entwickelten Methoden untersuchen. Die Anwendung auf das behandelte Beispiel der konstanten Differentialgleichung Gl. (3.27) ergibt

$$\Delta \ddot{x} + 2D\Omega \Delta \dot{x} + 3K\Omega^2 x_{part}^2 \Delta x = 0 . \quad (3.34)$$

Setzt man als partikuläre Lösung z.B. das Ergebnis der harmonischen Balance nach Gl. (3.29) ein, entsteht eine MATHIEUSche, also parametererregte Differentialgleichung. Die zugehörige Lösung ist in [Bild 3.7](#) oben für die Anfangsbedingungen $\Delta x(0) = 2$, $\Delta \dot{x}(0) = 0$ dargestellt. Zum Vergleich zeigt das untere Diagramm den Zeitverlauf, der sich aus der nichtlinearen Gleichung mit einer entsprechend klein angesetzten Störung von $x(0) - x_{part}(0) = 0.2$, $\dot{x}(0) - \dot{x}_{part}(0) = 0$ gegenüber der periodischen Lösung ergibt. Die Abweichungen resultieren dabei hauptsächlich aus der Verwendung der sehr einfachen Näherung für x_{part} im oberen Fall und weniger aus dem Einfluß der Nichtlinearität im unteren Fall. Dennoch liefert die Auswertung der linearen Gleichung bezüglich Frequenz und Dämpfung gute Ergebnisse, wie die Genauigkeitsbetrachtungen in Kap. 3.2.5 zeigen.

Wenn es nicht möglich ist, die Gleichungen analytisch zu linearisieren, lassen sich die Elemente der Matrix \underline{A} doch durch Differenzenquotienten annähern und numerisch berechnen. Die lineare Variationsgleichung ist dann natürlich nicht mehr geschlossen in Abhängigkeit von t zu formulieren, sondern liegt nur für die ausgewerteten diskreten Zeitpunkte vor (vgl. z.B. [46]).

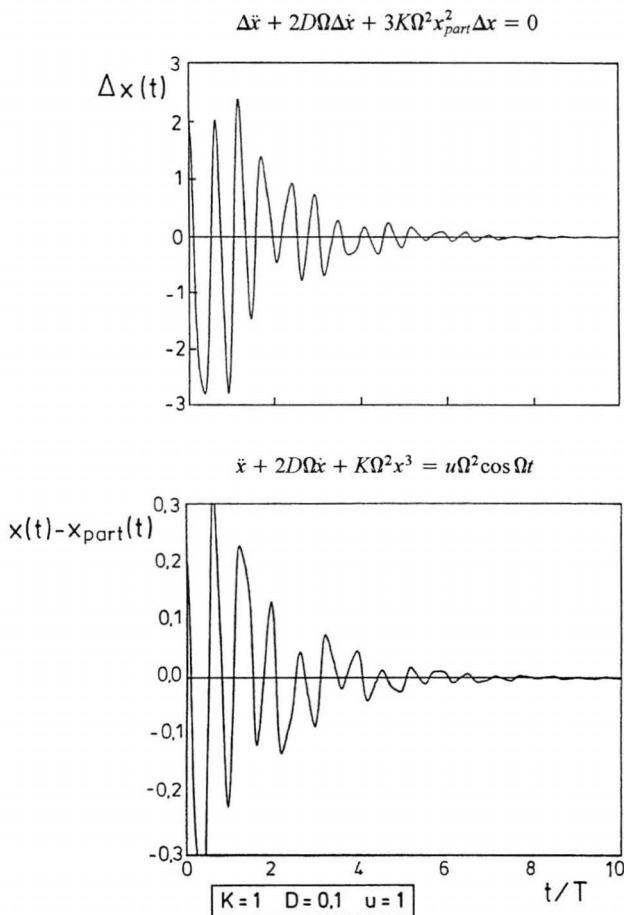


Bild 3.7 Periodische Lösung zu Gl. (3.27), ermittelt durch Lösen der um den Ansatz Gl. (3.29) linearisierten Differentialgleichung (oben) oder durch Störung der exakten Lösung (unten)

3.2.3 Numerische Simulation

Auch für Stabilitätsuntersuchungen läßt sich die numerische Integration einsetzen. Wird schon die partikuläre Lösung mit diesem Verfahren bestimmt, erhält man mit dem Einschwingvorgang $x(t) - x_{part}(t)$ zugleich immer eine qualitative Aussage zur Stabilität. Während Nichtlinearitäten bei der Verwendung hinreichend kleiner Störungen keine Probleme

verursachen, verhindert eine Parametererregung jedoch ggf. die Auswertung des Zeitverlaufs mit einfachen Verfahren. Dies wird sofort verständlich, wenn man die Struktur der Lösungen Gl. (3.18) betrachtet. Unterscheiden sich die Eigenfrequenz des zugehörigen Systems mit konstanten Koeffizienten und die über die Transformation $\underline{z}(t)$ einfließende Erregerfrequenz Ω nur geringfügig, kommt es zu Schwebungserscheinungen. In diesen Fällen kann die Bestimmung der Dämpfung nur durch spezielle, verhältnismäßig aufwendige Methoden (siehe z.B. [54]) erfolgen.

Bild 3.8 veranschaulicht dieses Problem anhand zweier Lösungen für die MATHIEUSche Differentialgleichung Gl. (3.1). Im Fall von Parameterresonanz (vgl. Kap. 4.3.1) läßt sich die Dämpfung über das logarithmische Dekrement direkt aus dem Zeitverlauf ermitteln ($K_c = 4.43$, oberes Diagramm). Mit nur geringfügig veränderten Parametern zeigt die Lösung jedoch einen deutlich komplizierteren Zeitverlauf und läßt das - in diesem Beispiel schwach stabile - Verhalten erst nach Auswertung einer sehr großen Anzahl von Erregerperioden erkennen ($K_c = 4.40$, unteres Diagramm).

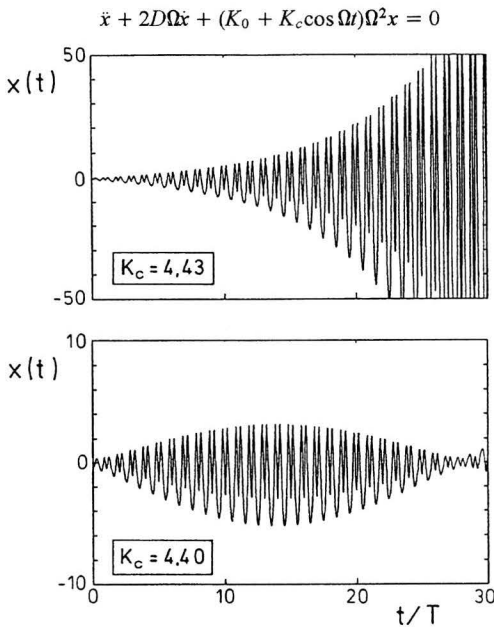


Bild 3.8 Vergleich zweier Lösungen der MATHIEUSchen Differentialgleichung Gl. (3.1) für etwas unterschiedliche Parameter K_c ($K_0 = 5$, $D = 0$, A.B. : $\dot{x}(t = 0) = -1/s$)

3.2.4 Das modifizierte FLOQUET-Verfahren

Wie in den vorangegangenen Abschnitten dargestellt, läßt sich die Stabilität nichtlinearer (periodischer) Systeme entweder durch eine lineare Variationsgleichung Gl. (3.33) oder durch die Differenz zwischen gestörter und partikulärer Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung beschreiben. Entsprechend soll nun angenommen werden, daß die Transitionsmatrix nach Gl. (3.6) nicht nur die Zustände linearer Systeme, sondern auch kleine Störungen der Lösungen nichtlinearer Systeme abbildet. Für die Monodromiematrix folgt dann analog zu Gl. (3.13)

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_0 + T) - \underline{x}_{part}(t_0 + T) &= \underline{\Phi}(t_0 + T) [\underline{x}_0 - \underline{x}_{part0}] \\ \left[\begin{array}{c} [\underline{x}(t_0 + T) - \underline{x}_{part}(t_0 + T)]^I; [\underline{x}(t_0 + T) - \underline{x}_{part}(t_0 + T)]^{II}; \dots \end{array} \right] &= \underline{\Phi}(t_0 + T) [\underline{\varepsilon} \underline{I}] \\ \left[\begin{array}{c} \underline{\varepsilon} \underline{\Phi}_*^I; \quad \underline{\varepsilon} \underline{\Phi}_*^{II}; \dots \end{array} \right] &= \underline{\varepsilon} \underline{\Phi}_* \end{aligned} \quad (3.35)$$

Zur Stabilitätsuntersuchung wird in diesem Fall also von der jeweils um ε gestörten, bekannten partikulären Lösung bei t_0 wie z.B.

$$\underline{x}_0^I = \left[\underline{x}_{part0} + \underline{\varepsilon} \underline{e} \right]^I = \underline{x}_{part0}^I + \left[\begin{array}{c} \underline{\varepsilon} \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right] \quad (3.36)$$

ausgegangen und dieser Zustand über eine Erregerperiode aufintegriert. Dann wird von der Gesamtlösung wieder zu den Abweichungen übergegangen und mit $1/\varepsilon$ auf Einheitsstörungen umgerechnet:

$$\underline{\Phi}_*^I = \frac{1}{\varepsilon} [\underline{x}(t_0 + T) - \underline{x}_{part}(t_0 + T)]^I \quad (3.37)$$

Je nach Skalierung (und ggf. Dimension) der einzelnen Zustandsgrößen kann es sich als numerisch vorteilhaft erweisen, für die Berechnung der Matrixspalten $\underline{\Phi}_*^I, \underline{\Phi}_*^{II}, \dots$ von jeweils unterschiedlich großen Störungen ε auszugehen.

Auf die so ermittelte Monodromiematrix läßt sich direkt der in Kap. 3.1 beschriebene FLOQUET-Formalismus anwenden. Man gelangt damit zu einer Stabilitätsaussage ohne aufwendige analytische oder numerische Linearisierung. Enthält die partikuläre Lösung subharmonische Anteile der Frequenz Ω/n (vgl. Kap. 3.2.1), muß allerdings über n Erregerperioden integriert werden. Für die dabei ermittelte Matrix gilt dann abweichend von Gl. (3.8)

$$\tilde{\underline{\Phi}}_* = \underline{\Phi}_*(t_0 + nT) \quad (3.38)$$

Zur Umrechnung der Eigenwerte $\tilde{\mu}_i$ dieser Matrix in die zugehörigen charakteristischen Exponenten verwendet man in diesem Fall die Beziehung (vgl. (3.23))

$$\lambda_i = \frac{1}{mT} \ln \tilde{\mu}_i \quad (3.39)$$

Bild 3.9 beschreibt das Vorgehen wieder am Beispiel von Gl. (3.28). Die dünnen Linien kennzeichnen die periodischen, die dickeren die gestörten Lösungen. Die subharmonischen Anteile in der partikulären Lösung (vgl. das FOURIER-Spektrum Bild 3.5) erfordern in diesem Fall eine Integration über $8\pi/\Omega$, also die vierfache Erregerperiode. Die hier dargestellte Methode, im weiteren als modifiziertes FLOQUET-Verfahren bezeichnet, wird in [88] angedeutet und in [57] in etwas abweichendem Zusammenhang beschrieben.

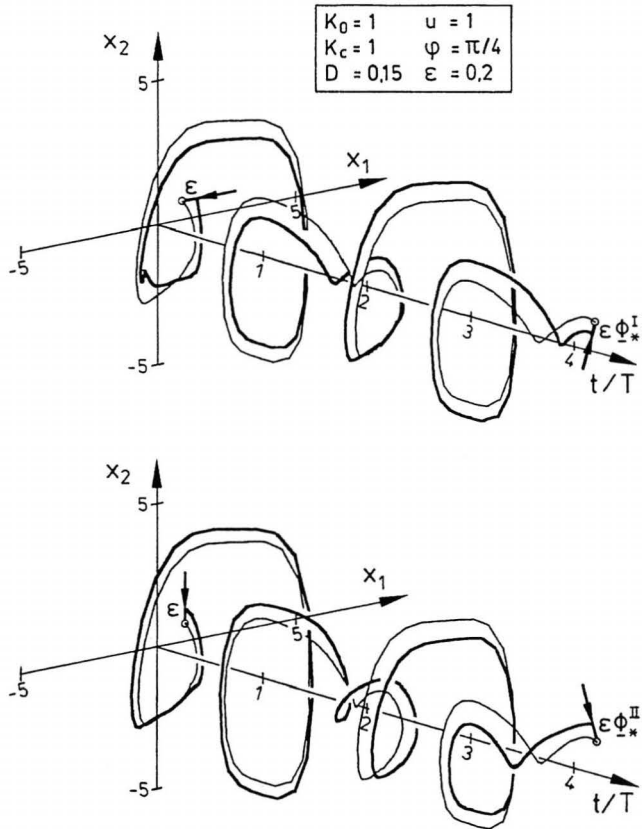


Bild 3.9 Ermittlung der Monodromiematrix bei nichtlinearen Systemen

3.2.5 Betrachtungen zur numerischen Genauigkeit der verwendeten Algorithmen

Die Eignung der vorgestellten Verfahren hängt ganz entscheidend von ihren jeweiligen numerischen Eigenschaften ab. Im folgenden sollen einige qualitative Aussagen die Bewertung der unterschiedlichen Methoden ermöglichen, wobei insbesondere auf das modifizierte FLOQUET-Verfahren eingegangen wird. Ferner werden anhand mehrerer Testrechnungen Hinweise zur Festlegung der Verfahrensparameter wie Schrittweite, Fehlerschranken etc. gegeben.

Zunächst soll das Fehlerverhalten bei der praktischen Anwendung der klassischen FLOQUET-Theorie untersucht werden. Dazu liefert Bild 3.10 die relativen Fehler von Frequenz und Dämpfung über der für die numerische Integration verwendeten Stützstellenanzahl. Um auf exakte Referenzwerte beziehen zu können, wurde eine konstante Differentialgleichung untersucht, deren Parameter der Schlagbewegungsgleichung im Schwebeflug entsprechen. Es zeigen sich bei der FLOQUET-Theorie für Real- und Imaginärteile negative Steigungen von ca. -20 dB/Dek. Dieser Abfall ergibt sich auch für periodische Systeme und ist unabhängig vom verwendeten Integrationsverfahren; bei Parametererregung sind die Fehler jedoch ca. 20 mal größer. Die Integration der Transitionsmatrix erfordert also verhältnismäßig kleine Schrittweiten. Dies liegt nahe, da die Zustände einer einzigen Zeitstützstelle bei $t = t_0 + T$ über die berechnete Stabilität entscheiden.

Zum Vergleich ebenfalls eingezeichnet sind die Fehler bei Auswertung des numerisch integrierten Zeitverlaufs, wozu über jeweils fünf Perioden die logarithmischen Dekremente gemittelt wurden. Das Fehlerverhalten erweist sich mit einer Steigung von ca. -80 dB/Dek. als erheblich günstiger. In diesem Fall hat die Ordnung des Integrationsverfahrens entscheidenden Einfluß; wird statt des verwendeten RUNGE-KUTTA-Algorithmus (4. Ordnung) nach HEUN (2. Ordnung) oder EULER (1. Ordnung) integriert, verringert sich der Abfall auf -40 dB/Dek. bzw. -20 dB/Dek.

Die Ergebnisse zeigen, daß sich bei Anwendung der FLOQUET-Theorie mit der Wahl eines Integrationsverfahrens höherer Ordnung nicht die erwartete Verbesserung im Fehlerverhalten ergibt, sondern der Gradient mit -20 dB/Dek. nur einem Verfahren zweiter Ordnung entspricht.

$$\ddot{x} + 2D\Omega\dot{x} + K\Omega^2x = 0$$

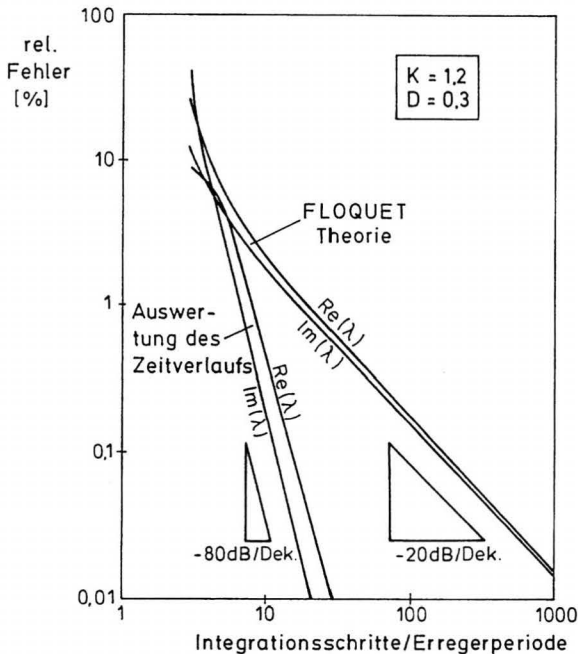


Bild 3.10 Fehlverhalten bei Anwendung der FLOQUET-Theorie und bei Auswertung des numerisch integrierten Zeitverlaufs (Integration in beiden Fällen nach RUNGE-KUTTA)

Im vorliegenden Beispiel ist die Eigenfrequenz des Systems von der selben Größenordnung wie Ω . Liegen die Eigenfrequenzen relativ zur aktuellen Erregerfrequenz dagegen deutlich höher, wie dies beim Stillsetzen und insbesondere für die Torsionsbewegung der Fall ist, muß mit entsprechend kleinerer Schrittweite integriert werden. Genauigkeitseinbußen treten bei den für diese Arbeit durchgeführten Rechnungen also ggf. bei sehr großen Fortschrittsgraden (entsprechend hoher Verhältnisse ω_0/Ω) auf. Das Fehlverhalten ist aber insofern völlig unkritisch, als im Bereich von Parameterresonanzen grundsätzlich zunächst der stabilere Eigenwert verfälscht wird, während der größere und damit interessantere Realteil das Stabilitätsverhalten noch korrekt abbildet. Man vergleiche dazu z.B. die Bilder 5.13 oder 5.16, in denen die stabilen Eigenwerte bei großen Fortschrittsgraden teilweise unregelmäßige Verläufe zeigen.

Bei Anwendung des modifizierten FLOQUET-Verfahrens zeigen zwei weitere Parameter entscheidende Auswirkung auf die Genauigkeit der Ergebnisse. Dies sind neben der oben erwähnten

- Integrationsschrittweite (bzw. der Anzahl der diskreten Zeitstützstellen pro Erregerperiode)
- die Größe der Anfangsstörung ε und
- die Genauigkeit der zugrunde gelegten periodischen Lösung.

Bild 3.11 zeigt den Einfluß dieser Größen auf die berechnete Dämpfung der mehrfach betrachteten Beispieldifferentialgleichung Gl. (3.27). Da mit den gewählten Parametern $K=1$, $D=0.1$ und $u=1$ keine Parameterresonanz auftritt, liegt der exakte Stabilitätswert bei $\operatorname{Re}(\lambda)/\Omega = -0.1$.

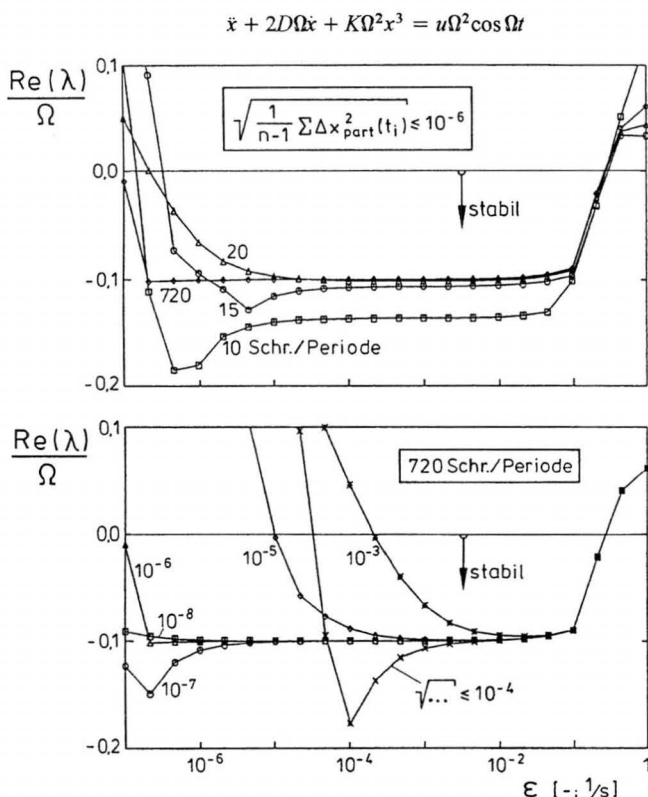


Bild 3.11 Fehlverhalten des modifizierten FLOQUET-Verfahrens am Beispiel der Differentialgleichung Gl. (3.27)

Das obere Diagramm betrifft noch einmal die Wahl der Integrationsschrittweite. Im vorliegenden Fall genügen schon 20 Schritte pro Erregerperiode, um die Dämpfung mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Die Störungen ε können dabei ungefähr zwischen 10^{-5} und 10^{-2} liegen. Wird mit 720 Schritten wesentlich genauer integriert, darf ε bis auf $2 \cdot 10^{-7}$ verkleinert werden.

Im unteren Diagramm ist die Wechselwirkung zwischen der Genauigkeit der numerisch integrierten partikulären Lösung und der Größe des Störparameters ε dargestellt. Das Abbruchkriterium für die Integration folgt wieder der Definition der Standardabweichung. Werden große mittlere Abweichungen zugelassen, d.h. die numerische Integration schon nach wenigen Umläufen abgebrochen, reagiert die berechnete Dämpfung sehr empfindlich auf den Betrag der Störung. Bei zu großen ε -Werten werden die Nichtlinearitäten der jeweiligen Differentialgleichung wirksam. Ist die Störung dagegen zu klein, wird sie von den Fehlern in der partikulären Lösung verdeckt. Daher folgt für die Anwendung des Verfahrens, daß zunächst ε hinreichend klein bezüglich der Nichtlinearitäten zu wählen und dann der zulässige mittlere Fehler noch mindestens zwei Größenordnungen kleiner anzusetzen ist. Fordert man für die periodische Lösung dagegen eine zu hohe Genauigkeit, erhält man lange Rechenzeiten, ohne daß sich dadurch die berechneten Stabilitätswerte verbessern würden.

Auch bei Verwendung des FOURIER-Abgleichs zur Bestimmung der partikulären Lösung stellt sich die Frage nach der erforderlichen Genauigkeit und damit nach der Anzahl der anzusetzenden Harmonischen. Rechnungen dazu zeigen, daß für eine anschließende Linearisierung die Anforderungen an die Genauigkeit der periodischen Lösung gering sind. Im Beispiel von Bild 3.4 oben ist die Dämpfung schon bei Linearisierung um den dargestellten Ansatz bis zur ersten Harmonischen im Rahmen der Rechengenauigkeit exakt zu ermitteln, die Abweichung in der Eigenfrequenz liegt bei +11%. Setzt man bis zur dritten Harmonischen an, reduziert sich dieser Wert auf +0.6%. Soll die partikuläre Lösung dagegen für das modifizierte FLOQUET-Verfahren verwendet werden, müssen im behandelten Beispiel sieben Harmonische berücksichtigt werden, um die Fehler auf vergleichbare Werte zu begrenzen. Gerade wenn ε wegen der Nichtlinearitäten klein gehalten werden muß, haben die Fehler im Zeitverlauf der periodischen Lösung einen großen Einfluß auf die Monodromiematrix und verschlechtern damit auch die berechneten Stabilitätswerte.

Abschließend werden die verschiedenen Verfahren noch anhand einiger Zahlenwerte verglichen, die einen Eindruck von den erzielbaren Genauigkeiten vermitteln sollen. Die Ergebnisse betreffen wieder Gl. (3.27) mit den schon oben verwendeten Parametern $K = 1$, $D = 0.1$ und $u = 1$. Die numerische Integration erfolgte in allen Fällen mit 360 Schritten pro Erregerperiode. **Tabelle 3.1** zeigt, daß bei sorgfältiger Wahl der Verfahrensparameter alle Methoden ähnlich gute Ergebnisse liefern.

Im vorliegenden Beispiel ist die Bestimmung der periodischen Lösung durch numerische Integration die effizientere Methode. Schon nach 14 Erregerperioden unterschreitet der mittlere Fehler die Abbruchschranke von $2 \cdot 10^{-7}$. Beim FOURIER-Abgleich müssen für eine vergleichbare Genauigkeit sieben Harmonische angesetzt werden, was selbst bei der einfachen Struktur der betrachteten Differentialgleichung einen deutlich größeren (Rechenzeit-)Aufwand bedeutet.

Stabilitätsuntersuchung durch:	partikuläre Lösung ermittelt durch:	
	FOURIER-Abgleich bis zur 7. Harmonischen	numerische Integration bis mittlerer Fehler $< 2 \cdot 10^{-7}$
analytische Linearisierung um $x_{\text{part}}(t)$ und klassische FLOQUET-Theorie	$\frac{\lambda}{\Omega} = -0.100000 \pm j1.551386$	$\frac{\lambda}{\Omega} = -0.100000 \pm j1.551399$
modifiziertes FLOQUET-Verfahren	$\frac{\lambda}{\Omega} = -0.100032 \pm j1.546781$ ($\varepsilon = 0.01$)	$\frac{\lambda}{\Omega} = -0.099859 \pm j1.551279$ ($\varepsilon = 0.0001$)
Auswertung des numerisch integrierten Zeitverlaufs $x(t) - x_{\text{part}}(t)$	$\frac{\lambda}{\Omega} = -0.09840 \pm j1.5586$ ($\varepsilon = 0.1$)	$\frac{\lambda}{\Omega} = -0.10440 \pm j1.5618$ ($\varepsilon = 0.001$)

Tabelle 3.1 Vergleich der Ergebnisse einer Beispielrechnung für verschiedene Stabilitätsrechenverfahren

Für die hier gewählte Differentialgleichung ist eine Linearisierung natürlich besonders einfach durchzuführen, und die anschließende Auswertung nach der klassischen FLOQUET-Theorie liefert die besten Ergebnisse. Bei komplizierteren Systemen müssen dagegen oft Programme zur symbolischen Formelverarbeitung eingesetzt werden und man gelangt schnell zu sehr umfangreichen Gleichungen. Auch ist für viele Systeme eine einmalige analytische Linearisierung gar nicht möglich, so daß für jeden Betriebszustand neu numerisch linearisiert werden muß.

Das modifizierte FLOQUET-Verfahren entspricht vom Aufwand der klassischen FLOQUET-Theorie und liefert ebenfalls sehr genaue Ergebnisse; dabei läßt es sich direkt auf alle nichtlinearen Gleichungen anwenden. Die Anforderungen an die Genauigkeit der zugrunde gelegten partikulären Lösung sind allerdings vergleichsweise hoch und hängen wie beschrieben mit der Wahl der Störung ε zusammen. Bei Verwendung der numerischen Integration läßt sich das Abbruchkriterium aber entsprechend [Bild 3.11](#) so wählen, daß die periodischen Lösungen mit Rücksicht auf die Rechenzeit nicht genauer als nötig berechnet werden. Dieses Verfahren wurde für mehrere Rechnungen in dieser Arbeit mit Erfolg eingesetzt und erwies sich dabei als besonders effizient.

Die Auswertung der durch numerische Integration gewonnenen Zeitverläufe liefert im vorliegenden Fall zwar bei wenig Aufwand noch gute Ergebnisse, erfordert bei ungünstigeren Verläufen (große Dämpfungen, mehrere Eigenformen, Schwebungen) jedoch sehr aufwendige Spezialverfahren.

Die hier angestellten Betrachtungen zum numerischen Verhalten und zur Genauigkeit der einzelnen Verfahren lassen sich natürlich nur eingeschränkt auf die später behandelten wesentlich komplexeren Gleichungssysteme übertragen und können somit lediglich als Anhaltspunkt dienen. Bei der Anwendung der Verfahren auf die Gleichungen der Blattbewegungen wurden in den meisten Fällen zusätzliche Genauigkeitsuntersuchungen durchgeführt, um die Wahl der jeweiligen Verfahrensparameter abzusichern, siehe z.B. [Bild 4.26](#).

4 Stabilität und Antwortverhalten der Schlagbewegung

Für die Flugmechanik des konventionellen Hubschraubers ist die Schlagbewegung der wichtigste Blattfreiheitsgrad. Sie beeinflusst maßgeblich Betrag und Richtung der vom Rotor erzeugten Kräfte und Momente. Erst durch die gezielte Anregung der Schlagbewegung über die zyklische Blattverstellung läßt sich der Hubschrauber steuern und erhält seine besonderen Manöviereigenschaften. Durch die konstruktive Ausbildung des Blattanschlusses werden die Flugeigenschaften entscheidend beeinflusst.

Die Stabilität der Schlagbewegung stellt dabei i.a. kein Problem dar. Im Schwebeflug berechnet sich der Dämpfungsgrad in grober Näherung (vgl. Gl. (4.8) und (4.9)) zu

$$D^* \approx D \approx \frac{1}{8} \gamma, \quad (4.1)$$

und liegt damit für übliche Blattmassenkonstanten γ (siehe Gl. (4.7)) in der Größenordnung von $D^* = 0.3 \dots 0.5$. Diese Werte bleiben im Vorwärtsflug bis zu Fortschrittsgraden von $\mu = 0.3$ nahezu unverändert. Damit ist der Schlagfreiheitsgrad verhältnismäßig unempfindlich gegenüber möglichen Instabilitäten.

Bei der Rotorstillsetzung wird die Stabilität jedoch zunehmend durch Parametererregung beeinflusst, denn mit dem Fortschrittsgrad wachsen auch die Amplituden der periodischen Anteile in den Differentialgleichungskoeffizienten. Gerade die Schlagbewegung ist davon stark betroffen, so daß ein gelenkig angeschlossenes Blatt ($c_s = 0$) ab ca. $\mu = 2.2$ instabil wird. Entsprechende Ergebnisse finden sich u.a. in [34], [38], [80], [81] und [82]. In den dort beschriebenen Beispielen wird jedoch davon ausgegangen, daß die Erhöhung des Fortschrittsgrades auf einer Steigerung der Fluggeschwindigkeit bei konstanter Rotordrehzahl beruht. In diesem Fall bleibt der konstante Anteil des Steifigkeitskoeffizienten annähernd unverändert, während er bei der Stillsetzung anwächst (vgl. die Kurven in Bild 4.6). Außerdem erfassen die Rechnungen i.a. nur das erste, in zwei Fällen gerade noch das zweite Parameterresonanzgebiet (siehe Kap. 4.3.1). Auch in den Freiheitsgraden Schwenken und Torsion können bei abgesenkter Rotordrehzahl Parameterresonanzen auftreten, welche aber bei üblicher Blattauslegung im entkoppelten Fall nicht zu Instabilitäten führen (vgl. Kap. 5). Die entscheidende Voraussetzung für das Konzept der Stillsetzung ist daher eine Rotorauslegung, die Schlagstabilität auch bei hohen Fortschrittsgraden sicherstellt.

4.1 Die Schlagdifferentialgleichung

Wie mehrfach angedeutet, sind die Vorteile linearisierter Gleichungen bezüglich ihrer mathematischen Behandlung so groß, daß auch in der vorliegenden Arbeit diese Form besonders ausführlich behandelt wird. Die Gültigkeit der damit verbundenen vereinfachenden Annahmen wird jeweils gesondert überprüft (vgl. Kap. 4.3.3, 4.4.3 und 5.3). Bis auf einige Untersuchungen zu speziellen Kopplungseffekten gehen auch alle veröffentlichten Arbeiten zur Schlagbewegung von linearen Gleichungen aus, siehe z.B. [78] bis [82].

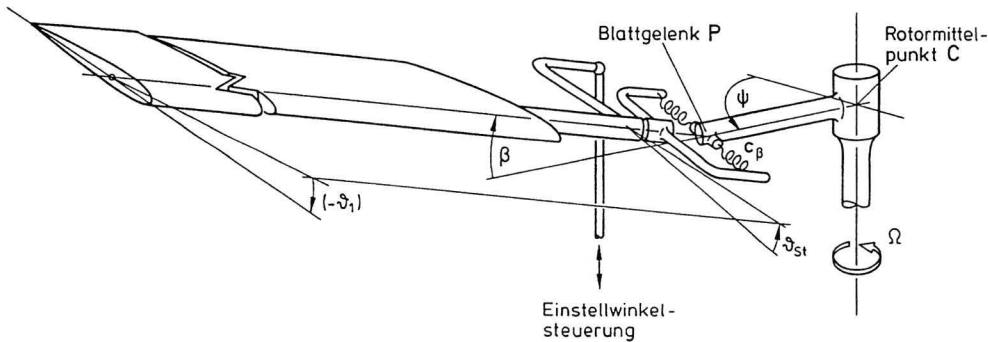


Bild 4.1 Blattersatzmodell für die isolierte Schlagbewegung

Das in seinem Bewegungsverhalten zu beschreibende Blattersatzmodell ist in Bild 4.1 noch einmal anschaulich dargestellt. Die zugehörige Differentialgleichung ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht im fiktiven Schlaggelenk P um die y_β -Achse. Zu berücksichtigen sind im einzelnen:

- die Massenkraftmomente nach Kap. 2.4
- das Luftkraftmoment nach Kap. 2.5.1 bzw. 2.5.2 und
- das Federmoment der fiktiven Blattanschlußsteifigkeit.

Durch die Einführung verschiedener Blatt(trägheits)momente, deren Definitionen im Anhang A.4, Gl. (A.7) zusammengestellt sind, lassen sich die aus den örtlichen Beschleunigungen und differentiellen Massenelementen gebildeten Trägheits- und Gewichtskräfte mit dem jeweiligen Hebelarm entlang des Blattradius zu Schlagmomenten aufintegrieren. Man erhält die folgenden Einzelterme, die den zugrundeliegenden physikalischen Effekten zuzuordnen sind:

$$M^{\text{Träg.}} = -J^{PP} \Omega^2 \beta'' \quad (4.2)$$

$$M^{\text{Zentrif.}} = -J^{CP} \Omega^2 \beta \quad (4.3)$$

$$M^{\text{Gewicht}} = -S^P g \quad (4.4)$$

Es erweist sich insbesondere im Hinblick auf die Untersuchungen bei variabler Drehzahl als günstig, den Rotorumlaufwinkel als dimensionslose Zeit einzuführen und die Ableitungen entsprechend umzuschreiben. Dadurch liefern die Stabilitätsrechnungen für die so formulierten Differentialgleichungen ohne weitere Umrechnung dimensionslose Eigenwerte der Form λ/Ω .

Das Luftkraftmoment wurde ausführlich in Kap. 2.5.1 und 2.5.2 beschrieben und hat die Form

$$M^{\text{Luft}} = \frac{\rho}{2} C_{aa} I_{Bl} R^2 \int_A^B \alpha_{eff} v_t^2 \left(x - \frac{a}{R}\right) dx, \quad (4.5)$$

wobei für α_{eff} je nach Behandlung der Rückanströmung die Ausdrücke von Gl. (2.29) bzw. (2.39) einzusetzen sind. Für das Federmoment wird der übliche lineare Ansatz verwendet:

$$M^{\text{Feder}} = -c_\beta \beta = -J^{PP} \bar{\omega}_\beta^{nr^2} \Omega_{nenn}^2 \beta \quad (4.6)$$

mit der Federkonstanten c_β entsprechend dem in Kap. 2.3.2 behandelten Ersatzsystem. Führt man noch die Blattmassenkonstante als Verhältnis zwischen Luftkraft- und Massenkraftmomenten ein

$$\gamma = \frac{\frac{\rho}{2} C_{aa} I_{Bl} R^4}{J^{PP}}, \quad (4.7)$$

ergibt sich die lineare inhomogene Schlagdifferentialgleichung

$$\beta'' + \gamma D(\psi) \beta' + \left[\gamma K(\psi) + K_0 \right] \beta = \gamma \left[E_1(\psi) \vartheta_1 + E_2(\psi) \vartheta_{St} + E_3(\psi) \delta \right] + F_0. \quad (4.8)$$

Im Schwebeflug sind alle Differentialgleichungskoeffizienten konstant; im Vorwärtsflug dagegen führen die während des Rotorumlaufs schwankenden Luftkräfte zu periodischen Termen, deren Amplituden mit dem Fortschrittsgrad wachsen. Mit Gl. (2.36) und Gl. (2.41) ergeben sich für die Fälle ohne bzw. mit Berücksichtigung der Rückanströmung die folgenden Koeffizienten.

ohne Rückanströmung:

unter Berücks. d. Rückanströmung:

$$\begin{aligned}
 D(\psi) &= (C_4 - \frac{a}{R}C_3) + (C_3 - \frac{a}{R}C_2)\mu \sin \psi &= C_4^R - \frac{a}{R}C_3^R \\
 K(\psi) &= C_3\mu \cos \psi + C_2\mu^2 \cos \psi \sin \psi &= C_3^R\mu \cos \psi \\
 F_1(\psi) &= C_5 + 2C_4\mu \sin \psi + C_3\mu^2 \sin^2 \psi &= C_5^R + C_4^R\mu \sin \psi \\
 E_2(\psi) &= C_4 + 2C_3\mu \sin \psi + C_2\mu^2 \sin^2 \psi &= C_4^R + C_3^R\mu \sin \psi \\
 E_3(\psi) &= C_3 + C_2\mu \sin \psi &= C_3^R
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Verläufe dieser Funktionen sind für den Fall mit Rückanströmung im Anhang A.5, Bild A.1 für vier verschiedene Fortschrittsgrade dargestellt. Man erkennt sofort, daß $K(\psi)$ als einziger Term mittelwertfrei ist. Auf die Abweichungen gegenüber dem Fall ohne Rückanströmung wird in Kap 4.3.2.1 näher eingegangen.

Die beiden verbleibenden Koeffizienten beschreiben den Einfluß der Rotordrehzahl auf die Massenkkräfte und sind nicht vom Umlaufwinkel abhängig:

$$K_0 = \frac{J^{CP}}{J^{PP}} + \left[\frac{\bar{\omega}_{\beta}^{nr}}{\Omega} \right]^2 \quad (4.10)$$

$$F_0 = -\frac{S^P}{J^{PP}} \frac{g}{\Omega^2} \quad (4.11)$$

Der konstante Steifigkeitsterm K_0 ergibt sich aus den rückstellenden Momenten von Zentrifugalkraft und Blattanschlußfeder. Im Vakuum entspricht K_0 gerade dem Verhältnis der Quadrate von Schlageigenfrequenz und Rotorkreisfrequenz, vgl. Gl. (2.14) und (2.15). Bild 4.2 zeigt den sich für verschiedene Anschlußsteifigkeiten ergebenden Verlauf. Durch den Einfluß der Zentrifugalkräfte liegt die Eigenfrequenz ω_0 immer über 1Ω . Man erkennt ferner, wie bei niedrigen Rotordrehzahlen der Einfluß der Ersatzfedersteifigkeit in den Vordergrund tritt.

F_0 beschreibt den bei der Stillsetzung wachsenden Einfluß des Blattgewichtes. Dieser Term ist bei Nennndrehzahl sehr klein und wird üblicherweise vernachlässigt. Bei Untersuchungen zur Stillsetzung hat er jedoch großen Einfluß auf die Antwortamplituden (Kap. 4.4.2) und deren Unterdrückung durch regelungstechnische Maßnahmen (siehe Kap. 6.3.2.2). Werden wie in Kap. 2.5.3 beschrieben bei der aerodynamischen Modellierung Nichtlinearitäten berücksichtigt, ergeben sich durch die Terme der rechten Seite sogar

Auswirkungen auf die Stabilität (siehe Kap. 4.4.3). Zunächst wird aber der lineare Fall behandelt, so daß die Stabilitätsbetrachtungen anhand der zugehörigen homogenen Gleichung durchgeführt werden können. Im Anhang A.4 und A.5 ist die Schlagdifferentialgleichung mit allen Definitionen und Abkürzungen noch einmal zusammengestellt.

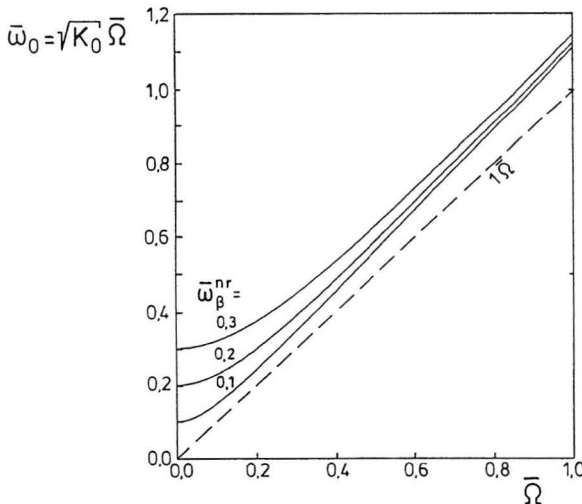


Bild 4.2 Einfluß der Ersatzfedersteifigkeit auf den konstanten Steifigkeitsterm K_0 bzw. die Schlägeigenfrequenz (im Vakuum)

4.2 Statische Stabilität

Die einfachste Stabilitätsforderung betrifft die statische Stabilität, welche bei dynamisch stabilen parametererregten Systemen natürlich nicht notwendigerweise für die gesamte Erregerperiode vorausgesetzt werden kann (siehe STRUTTsche Karte Kap.4.3.1). Mit $\beta'' = \beta' = 0$ reduziert sich die Schlagmomentengleichung zu

$$[\gamma K(\psi) + K_0]\beta = \gamma E(\psi) + F_0 \quad . \quad (4.12)$$

Die Grenze zur statischen Divergenz ergibt sich für

$$[\gamma K(\psi) + K_0] = 0 \quad , \quad (4.13)$$

da die zugehörigen Auslenkungen β für diesen Fall gegen unendlich gehen. Der periodische aber mittelwertfreie Koeffizient $K(\psi)$ nimmt während eines Teils des Umlaufs negative Werte an. Statische Stabilität in allen Blattstellungen ist also nur sichergestellt, wenn der positive, stabilisierende Term K_0 immer hinreichend groß bleibt. Für die konstruktive Auslegung des Blattes ist die mindestens erforderliche Anschlußsteifigkeit von Interesse. Diese ergibt sich nach Auflösen von Gl. (4.13) mit den Koeffizienten Gl. (4.9) und (4.10) bei Berücksichtigung der Rückanströmung zu

$$\bar{\omega}_{\beta}^{nr} = \sqrt{-\gamma C_3^R \mu \cos \psi - J^{CP}/J^{PP}} \bar{\Omega} . \quad (4.14)$$

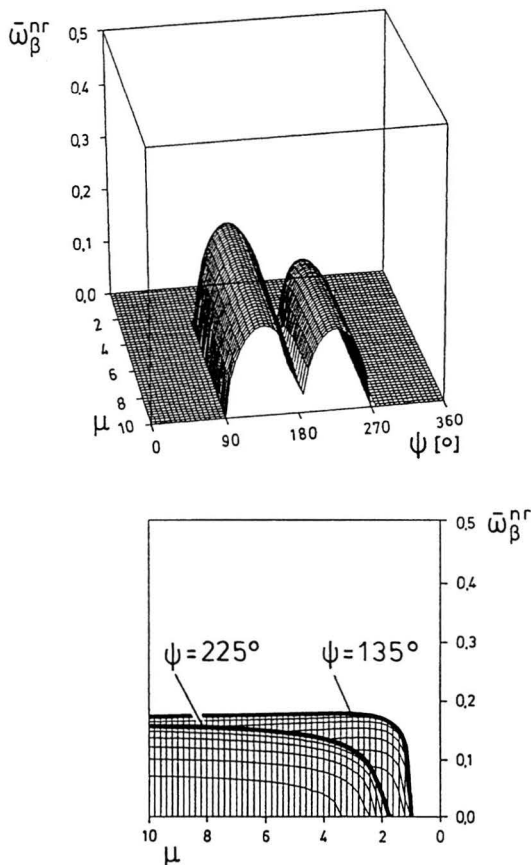


Bild 4.3 Erforderliche Anschlußsteifigkeit für statische Stabilität des isolierten Schlagfreiheitsgrades

Dieser Grenzwert ist in Bild 4.3 über dem Umlaufwinkel und dem Fortschrittsgrad aufgetragen; die Blattenden entsprechen den Referenzwerten aus Anhang A.1. In der rückwärtigen Hälfte der Rotorkreisscheibe für $0^\circ < \psi < 90^\circ$ und $270^\circ < \psi < 360^\circ$ besteht keine Divergenzgefahr; sogar ein voll gelenkig angeschlossenes Rotorblatt ist in diesem Bereich für alle Fortschrittsgrade statisch stabil. Die kritischen Blattstellungen liegen bei $\psi = 135^\circ$ und 225° , wobei das vorlaufende Blatt wegen der höheren Staudrücke etwas stärker gefährdet ist. Der Maximalwert der erforderlichen Anschlußsteifigkeit beträgt $\bar{\omega}_\beta^{\text{er}} = 0.172$ und tritt schon bei Fortschrittsgraden um $\mu = 3$ auf; danach sinkt die Grenzsteifigkeit wieder geringfügig ab. Wie zu erwarten, verringern sich mit wachsendem μ die Unterschiede zwischen vorlaufendem und rücklaufendem Blatt.

Die physikalische Ursache für das Auftreten von Divergenz liegt in der Zusatzanströmung von unten des nach vorne weisenden, nach oben ausgelenkten Blattes durch eine Komponente der Fluggeschwindigkeit. Der dadurch entstehende Zusatzauftrieb vergrößert den Schlagwinkel noch weiter und führt ohne ausreichende, rückstellende Zentrifugal- und Gelenkfederkräfte zum Verlust der statischen Stabilität.

4.3 Dynamische Stabilität der Schlagbewegung bei konstanter Rotordrehzahl

Die Untersuchung der dynamischen Stabilität der Schlagbewegung stellt mit den in Kap. 3 zusammengestellten Methoden rechentechnisch kein besonderes Problem dar. Parametererregte Systeme unterscheiden sich in ihren dynamischen Eigenschaften jedoch so grundlegend von üblichen Systemen mit konstanten Koeffizienten, daß es sinnvoll erscheint, zunächst anhand einfacher Beispiele einige Besonderheiten zu beschreiben. Dabei soll insbesondere versucht werden, einen Zusammenhang zwischen der in der Literatur ausgiebig untersuchten MATHIEUSchen Differentialgleichung und der hier interessierenden Schlagdifferentialgleichung herzustellen.

4.3.1 Prinzipielle Überlegungen anhand der MATHIEUschen Differentialgleichung und der STRUTTschen Karte

Viele Autoren haben sich in ihren Arbeiten zur Parametererregung mit der MATHIEUschen Differentialgleichung auseinandergesetzt, da diese eine sehr einfache Struktur besitzt und sich damit für grundlegende Betrachtungen besonders eignet:

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + (K_0 + K_c \cos \Omega t)\Omega^2 x = 0 \quad . \quad (4.15)$$

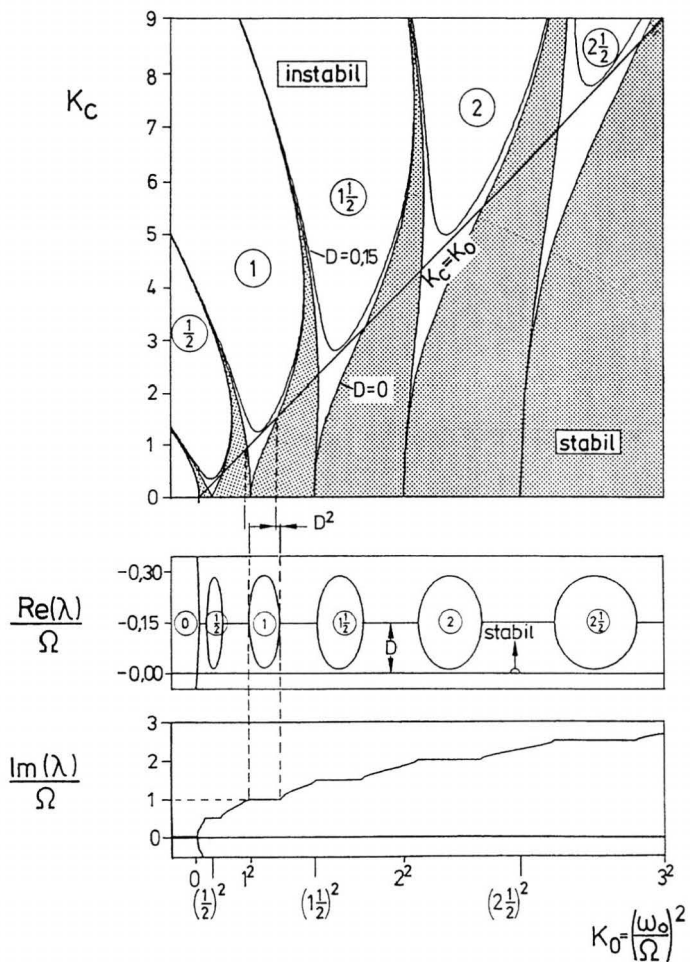


Bild 4.4 STRUTTsche Karte (oben) und Verlauf der Eigenwerte entlang der Kurve $K_c = K_0$ für $D = 0.15$ (unten)

Wichtigstes Ergebnis dieser Untersuchungen waren die schon 1932 von INCE und STRUTT in [75] bzw. [74] veröffentlichten Stabilitätsgrenzen der MATHIEUSchen Gleichung (für $D = 0$) in Abhängigkeit von den Parametern K_0 und K_c . Wenig später wurde auch der Einfluß des Dämpfungsterms D behandelt, siehe z.B. [73]. Bild 4.4 zeigt im oberen Teil das zugehörige, häufig als STRUTTsche Karte bezeichnete Stabilitätsdiagramm.

Die Grenzkurven entsprechen den Höhenlinien $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ des "Stabilitätsgebirges" $\operatorname{Re}(\lambda)/\Omega = f(K_0, K_c)$. Ein Ausschnitt dieses Gebirges für den Fall $D = 0$ ist in Bild 4.5 dargestellt. Man kann deutlich zwischen zwei charakteristischen Parameterbereichen unterscheiden:

- Gebiete, in denen beide Realteile null und damit die Lösungen schwach stabil sind, sowie
- Gebiete, in denen einer der beiden Realteile als Funktion von K_0 und K_c mehr oder weniger positiv wird, d.h. instabile Lösungen vorliegen.

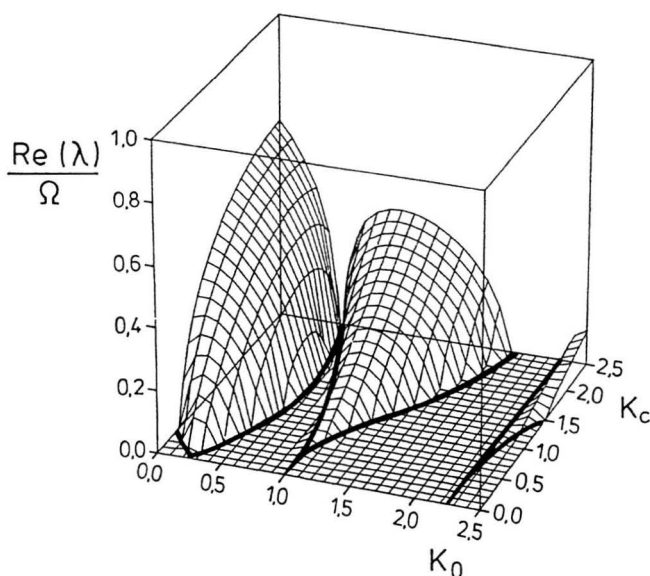


Bild 4.5 Stabilitätsgebirge der MATHIEUSchen Differentialgleichung ($D = 0$)

Wird zusätzlich der Dämpfungsterm berücksichtigt, verschiebt sich das gesamte Stabilitätsgebiet um D nach unten in Richtung negativer Realteile und um D^2 nach rechts zu größeren K_0 -Werten (letzteres läßt sich durch Anwendung einer Transformation entsprechend Gl. (4.16) leicht zeigen). In der STRUTTschen Karte ziehen sich dadurch die instabilen Gebiete von der K_0 -Achse zu größeren K_c -Werten zurück.

Genaueren Aufschluß über das Verhalten der Eigenwerte gibt der untere Teil von Bild 4.4. Dort ist der Verlauf der Eigenwerte entlang der Kurve $K_c = K_0$ für eine Dämpfung von $D = 0.15$ dargestellt. Diese Parameterkombination stellt insofern eine besondere Grenze dar, als unterhalb dieser Geraden in der STRUTTschen Karte während der gesamten Erregerperiode statische Stabilität im Sinne von Kap. 4.2 vorliegt.

Man erkennt wieder die beiden typischen Zustände. In den Bereichen mit $\text{Re}(\lambda)/\Omega = D$ ist das Verhalten ähnlich dem konstanter Systeme, und die Eigenfrequenz wächst monoton mit der Steifigkeit K_0 . Dort jedoch, wo die theoretische (der konstanten Steifigkeit entsprechende) Eigenfrequenz ω_0 in der Nähe eines ganzzahligen Vielfachen von $\Omega/2$ liegt, tritt die sogenannte Parameterresonanz auf. Dabei "rastet" die reale Eigenfrequenz $\text{Im}(\lambda)$ auf ein $\Omega/2$ -Vielfaches "ein", und die beiden Realteile nehmen von $D\Omega$ abweichende Werte an. Während sich ein Realteil in Richtung stabileren Verhaltens bewegt, nähert sich der andere der Stabilitätsgrenze. Mit $D = 0.15$ ist die Dämpfung im vorliegenden Beispiel so gewählt, daß trotz Parameterresonanz das System gerade noch stabil bleibt.

Die Parameterresonanzgebiete treffen genau dort auf die K_0 -Achse, wo $\omega_0 = n\Omega/2$ gilt. Damit läßt sich jedem dieser Gebiete ein bestimmtes $\Omega/2$ -Vielfaches zuordnen. Auf diesen Wert bleibt $\text{Im}(\lambda)$ eingerastet, auch wenn bei starker Parametererregung der aktuelle ω_0 -Wert einem anderen $\Omega/2$ -Vielfachen näher liegt. Damit ist auch die Frage nach der Bestimmung der "richtigen" Frequenz bei Anwendung der FLOQUET-Theorie geklärt. Durch kontinuierliches Ausblenden der Periodizität innerhalb eines Parameterresonanzbereiches gelangt man auf der K_0 -Achse zum gesuchten $\Omega/2$ -Vielfachen.

Aus der STRUTTschen Karte ergibt sich als grundlegende Erkenntnis, daß sich alle Maßnahmen, die bei gegebener Dämpfung die konstanten Anteile im Steifigkeitsterm vergrößern, während sie die periodischen Anteile reduzieren, positiv auf die Stabilität auswirken.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Schlagdifferentialgleichung trotz ihrer komplizierteren Struktur vergleichbare Eigenschaften aufweist. Da es zunächst weiter um das prinzipielle Verhalten geht, wird bei den folgenden Überlegungen die Rückanströmung vernachlässigt. Ganz analog, jedoch mit erheblich größerem Rechenaufwand, könnte für den Fall mit Rückanströmung vorgegangen werden.

Im Gegensatz zur MATHIEUSchen ist in der Schlagdifferentialgleichung auch der Dämpfungsterm periodisch. Um die Stabilitätseigenschaften der Schlagbewegung dennoch anhand der STRUTTSchen Karte diskutieren zu können, wird diese Periodizität durch eine geeignete Transformation beseitigt. Bei Anwendung der in [36], [56], [57], [73] oder [80] vorgeschlagenen Substitution

$$x(t) = y(t) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t D(\tau) d\tau} \quad (4.16)$$

läßt sich die Stabilität des transformierten Systems jedoch nicht mehr ohne weiteres in der STRUTTSchen Karte darstellen, da die Abbildung nach Gl. (4.16) durch den Mittelwert in $D(t)$ nicht periodisch sondern zeitabhängig wird. Es ergäben sich damit für $x(t)$ und $y(t)$ unterschiedliche Stabilitätswerte. Bei der Schlagdifferentialgleichung wird daher nur die Periodizität aus dem Dämpfungsterm entfernt und die verbleibende konstante Dämpfung später in der STRUTTSchen Karte berücksichtigt. Mit dem Koeffizient aus Gl. (4.9) links lautet die Transformation

$$\beta(\psi) = \tilde{\beta}(\psi) e^{-\frac{1}{2} \int_0^\psi \left[\gamma(C_3 - \frac{a}{R}C_2)\mu \sin \eta \right] d\eta} \quad (4.17)$$

Nach Ableiten und Einsetzen in Gl. (4.8) erhält man als homogene Differentialgleichung

$$\tilde{\beta}'' + 2D \tilde{\beta}' + [K_0 + K_c \cos \psi + K_{c2} \cos(2\psi - 2\varphi_1 + \varphi_2)] \tilde{\beta} = 0 \quad (4.18)$$

$$\text{mit } D = \frac{1}{2}(C_4 - \frac{a}{R}C_3)\gamma$$

$$\begin{aligned} K_0 &= -\frac{1}{8}(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^2 \gamma^2 \mu^2 + \frac{J^{CP}}{J^{PP}} + \left[\frac{\bar{\omega}_{\tilde{\beta}}^{\eta\eta}}{\bar{\Omega}} \right]^2 \\ K_c &= \frac{1}{2} \gamma \mu \sqrt{(C_3 + \frac{a}{R}C_2)^2 + (C_4 - \frac{a}{R}C_3)^2 (C_3 - \frac{a}{R}C_2)^2 \gamma^2} \\ K_{c2} &= \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \sqrt{C_2^2 + \frac{1}{16}(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^4 \gamma^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{(C_4 - \frac{a}{R}C_3)(C_3 - \frac{a}{R}C_2)\gamma}{(C_3 + \frac{a}{R}C_2)}, \quad \tan \varphi_2 = \frac{-4C_2}{(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^2 \gamma}$$

Derartige HILLSche Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern, d.h. mit einem zusätzlichen 2Ω -Term wurden z.B. in [60], [63], [70] und [72] untersucht. Es ergeben sich komplizierte Stabilitätskörper, deren Oberflächen die Stabilitätsgrenzen sind, und die bei $K_c = 0$ bzw. $K_{c2} = 0$ jeweils von STRUTTschen Karten begrenzt werden. Der Phasenwinkel $\varphi = \varphi_2 - 2\varphi_1$ hat dabei deutlichen Einfluß auf die Lage der Stabilitätsgrenzen, wie die veröffentlichten Ergebnisse für $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 180^\circ$ und eigene Rechnungen für den sich aus den Referenzdaten hier ergebenden Winkel von $\varphi = -129^\circ$ zeigen.

Für die Schlagdifferentialgleichung sind die Parameter K_0 , K_c und K_{c2} nach Gl. (4.19) Funktionen des Fortschrittsgrades. Die Veränderungen in der Stabilität der Schlagbewegung während der Rotorstillsetzung (d.h. bei Reduzierung der Rotordrehzahl von Ω_{nenn} auf null) werden also anhand einer Kurve durch einen solchen Stabilitätskörper beschrieben. Wie der Vergleich der Ergebnisse dieses Kapitels mit den genaueren Rechnungen in Kap. 4.3.2.1 (Bild 4.11, Diagramm unten links) zeigt, lassen sich verlässliche Stabilitätsaussagen für $\mu \rightarrow \infty$ jedoch schon mit einer einfacheren Näherung gewinnen. Dazu wird die Kurve mit $K_c = 0$ bzw. $K_{c2} = 0$ auf die jeweilige STRUTTsche Karte projiziert und die Stabilitätsbetrachtungen an den zugehörigen MATHIEUschen Differentialgleichungen mit nur einem periodischen Term durchgeführt.

$$1\Omega: \quad \ddot{\tilde{\beta}}'' + 2D \tilde{\beta}' + (K_0 + K_c \cos \psi) \tilde{\beta} = 0 \quad (4.20)$$

$$2\Omega: \quad \ddot{\tilde{\beta}}'' + 2D \tilde{\beta}' + (K_0 + K_{c2} \cos 2\psi) \tilde{\beta} = 0 \quad (4.21)$$

Geht man zum direkten Vergleich mit der MATHIEUschen Gleichung (4.15) mit $\ddot{\tilde{\beta}}'' = \ddot{\tilde{\beta}}/\Omega^2$ und $\tilde{\beta}' = \dot{\tilde{\beta}}/\Omega$ auf die zeitlichen Ableitungen über, erhält man

$$1\Omega: \quad \ddot{\tilde{\beta}} + 2D \Omega \dot{\tilde{\beta}} + [K_0 + K_c \cos \Omega t] \tilde{\beta} = 0 \quad (4.22)$$

$$2\Omega: \quad \ddot{\tilde{\beta}} + D(2\Omega) \dot{\tilde{\beta}} + \left[\frac{1}{4}K_0 + \frac{1}{4}K_{c2} \cos(2\Omega t) \right] (2\Omega)^2 \tilde{\beta} = 0 \quad (4.23)$$

Es wird deutlich, daß in Gl. (4.23) die Dämpfung bezogen auf die neue Erregerfrequenz 2Ω um den Faktor zwei kleiner ist, als in der 1Ω -Näherung Gl. (4.22). Erstellt man unter Berücksichtigung der entsprechend umzurechnenden Maßstäbe und der jeweiligen (von μ unabhängigen) Dämpfung für beide Fälle ein Stabilitätsdiagramm, ergibt sich die Darstellung in Bild 4.6.

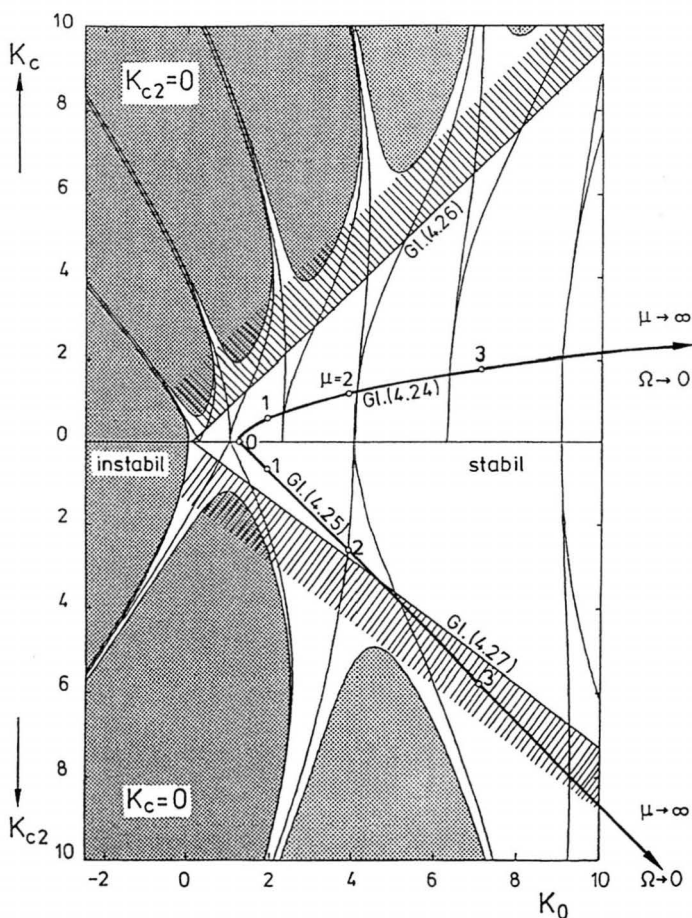


Bild 4.6 Untersuchung der Stabilität der Schlagdifferentialgleichung mittels STRUTTscher Karten durch Transformation in die MATHIEU-sche Form (für die eingezeichneten Kurven gilt $\bar{\omega}_{\beta}^{nr} = 0.17$)

Die Gleichungen der die Schlagstabilität beschreibenden Kurven ergeben sich aus Gl. (4.19) und lauten

$$K_c = \gamma V \sqrt{\frac{(C_3 + \frac{a}{R}C_2)^2 + (C_4 - \frac{a}{R}C_3)^2(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^2}{4R^2\Omega_{nenn}^2\bar{\omega}_{\beta}^{nr^2} - \frac{1}{2}\gamma^2V^2(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^2}} \left[K_0 - \frac{J^{CP}}{J^{PP}} \right] \quad (4.24)$$

$$K_{c2} = \gamma V^2 \frac{\sqrt{16C_2^2 + \gamma^2(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^4}}{8R^2\Omega_{nenn}^2\bar{\omega}_{\beta}^{nr^2} - \gamma^2V^2(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^2} \left[K_0 - \frac{J^{CP}}{J^{PP}} \right] \quad (4.25)$$

wobei in den Ausdruck für K_0 zunächst der Zusammenhang zwischen Rotordrehzahl und Fortschrittsgrad nach Gl. (2.13) eingesetzt wurde. Diese Funktionen sind für die Referenzdaten aus Anhang A.1 und eine Anschlußsteifigkeit von $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.170$ in die STRUTTschen Karten Bild 4.6 eingezeichnet.

Beide Kurven bleiben für alle Fortschrittsgrade im stabilen Bereich. Da K_{c2} linear mit K_0 wächst (Gl. (4.25)), während K_c nur mit $K_0^{1/2}$ ansteigt (Gl. (4.24)), wird verständlich, warum für große μ die 2Ω -Näherung den kritischeren Verlauf aufweist. Der Graph zu dieser Näherung, d.h. zu Gl. (4.25) werde hier als Stillsetzungsgerade bezeichnet.

In [62] sind für die MATHIEUsche Differentialgleichung mit Dämpfung einige einfache hinreichende Bedingungen für Stabilität zusammengestellt. Sie entsprechen in der K_0 , K_c -Parameterebene Geradengleichungen, die annähernd beschreiben, wie weit sich die exakten Stabilitätsgrenzen für eine bestimmte Dämpfung D von der K_0 -Achse zurückziehen. Dem genauen Verlauf am nächsten kommt die Beziehung

$$K_c \leq (K_0 - D^2) \tanh 2\pi D, \quad (4.26)$$

welche direkt auf die 1Ω -Näherung Gl. (4.22) anwendbar ist. Für die 2Ω -Näherung nach Gl. (4.23) ergibt sich durch Anpassen an die Form der MATHIEUschen Differentialgleichung die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{K_{c2}}{4} &\leq \left[\frac{K_0}{4} - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right] \tanh 2\pi \frac{D}{2} \\ \Leftrightarrow K_{c2} &\leq \left[K_0 - D^2 \right] \tanh \pi D. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Beide Grenzen sind für die Dämpfung der Schlagbewegung nach Gl. (4.19) ebenfalls in Bild 4.6 eingetragen. Aus der relativen Lage der Stillsetzungsgeraden Gl. (4.25) und des Graphen für die Stabilitätsgrenze Gl. (4.27) (hier als Stabilitätsgerade bezeichnet) lassen sich sofort zwei grundlegende Kriterien für Schlagstabilität bei großen Fortschrittsgraden formulieren:

- der Anfangspunkt der Stillsetzungsgeraden ($\mu = 0$ bzw. $K_{c2} = 0$) muß rechts von oder auf dem Anfangspunkt der Stabilitätsgeraden liegen:

$$\gamma^2(C_4 - \frac{a}{R}C_3)^2 \leq 4 \frac{J_{CP}}{J_{PP}} \quad (4.28)$$

- die Steigung der Stillsetzungsgeraden muß kleiner oder gleich der Steigung der Stabilitätsgeraden sein:

$$\gamma V^2 \frac{\sqrt{16C_2^2 + \gamma^2(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^4}}{8R^2\Omega_{nenn}^2\bar{\omega}_\beta^{nr^2} - \gamma^2V^2(C_3 - \frac{a}{R}C_2)^2} \leq \tanh \left[\frac{\pi}{2}\gamma(C_4 - \frac{a}{R}C_3) \right] \quad (4.29)$$

Für die Referenzdaten mit $\gamma = 3.5$ ergibt sich aus Gl. (4.29) eine erforderliche Blattanschlussteifigkeit von $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.193$. Geht man von einem zentralen Schlaggelenk mit $a/R = 0$, einem aerodynamischen Blattanfang bei $A = 0$, einem Fortschrittsgrad bei Stillsetzungsbeginn von $\mu_{nenn} = 0.2$ sowie $\tanh \sim 1$ aus, lassen sich aus den Gleichungen (4.28) und (4.29) einfache Näherungen herleiten.

$$\gamma \lesssim 8 \quad (4.30)$$

$$\frac{1}{10} \sqrt{\frac{\gamma^2}{18}} + \gamma \lesssim \bar{\omega}_\beta^{nr} \quad (4.31)$$

Aus Gl. (4.31) ergibt sich mit $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.204$ eine nur geringfügig höhere erforderliche Anschlussteifigkeit als aus der vollständigen Beziehung Gl. (4.29).

Damit sind die beiden wichtigsten Parameter bei der Blattauslegung beschrieben. Die Forderung nach kleinen Blattmassenkonstanten bedeutet: kleine Luftkräfte gegenüber großen Massenkräften. Dies ist sicher vorteilhaft, da einerseits die Luftkräfte für die schädliche Parametererregung verantwortlich sind, während andererseits die Massenkräfte in Form von Zentrifugalkräften stabilisierende Momente erzeugen. Die Forderung nach großen Anschlussteifigkeiten entspricht dem Bestreben, im Steifigkeitsterm die konstanten gegenüber den periodischen Anteilen zu verstärken.

Das in [Bild 4.6](#) dargestellte Beispiel zeigt allerdings auch, daß die hinreichende Bedingung nach Gl. (4.27) unnötig scharf ist. Die eingetragene Stillsetzungsgerade für $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.170$ bleibt, wie die späteren Rechnungen (Kap. 4.3.2.1) belegen, auch für noch größere μ im stabilen Bereich, obwohl sie die Grenzgerade schneidet.

Interessant ist schließlich noch, von der besonderen Stillsetzungsgeraden $dK_{c2}/dK_0 = 1$ auf die zugehörige Anschlußsteifigkeit zurückzurechnen. Entlang dieser Linie wachsen K_{c2} und K_0 über dem Fortschrittsgrad gleich schnell. Da außerdem wegen der Lage des Anfangspunktes immer $K_{c2} < K_0$ gilt, ist für alle μ statische Stabilität gewährleistet. So erhält man mit $\bar{\omega}_{\beta}^{nr} = 0.169$ fast genau jenen Wert, der sich in Kap. 4.2, [Bild 4.3](#) bezüglich Divergenz als erforderliche Anschlußsteifigkeit ergeben hat. Damit ist auch erklärt, warum diese Grenzsteifigkeit bei größeren Fortschrittsgraden praktisch konstant bleibt. Die Rückanströmung (hier vernachlässigt, dort berücksichtigt) hat auf diesen Zusammenhang keinen Einfluß, da der $K(\psi)$ -Koeffizient in beiden Fällen zwar einen unterschiedlichen Verlauf über ψ , aber die selben Maximalwerte in Abhängigkeit von μ besitzt (siehe [Bild 4.8](#) in Kap. 4.3.2.1).

Alle hier abgebildeten Stabilitätsdiagramme wurden unter Anwendung der FLOQUET-Theorie erstellt. Während für [Bild 4.5](#) die Realteile zu vorgegebenen, in der K_0 - K_c -Parameterebene rasterförmig verteilten Wertepaaren berechnet wurden, entstanden die STRUTTSchen Karten in [Bild 4.4](#) und [Bild 4.6](#) unter Anwendung eines speziellen Suchalgorithmus, mit dem entlang der interessierenden Höhenlinien $\text{Re}(\lambda) = \text{const.}$ K_0 - K_c -Wertepaare ermittelt werden können.

4.3.2 Stabilitätsrechnungen für die lineare Schlagdifferentialgleichung

Nur wenige Veröffentlichungen [78] bis [82] behandeln die Stabilität der Schlagbewegung im Vorwärtsflug. Die Gründe dafür liegen zum einen in der immer ausreichend vorhandenen (konstanten) Dämpfung und zum anderen im erst späten Einsetzen möglicher Parameterresonanzen (nicht unter $\mu = 0.5$). Damit ist für eine normale Rotorauslegung und bei den von Hubschraubern erfliegbaren Fortschrittsgraden von einer stabilen Schlagbewegung auszugehen. In den Arbeiten [78] und [79] sind entsprechend nur die ersten beiden Parameterresonanzgebiete von (eher theoretischem) Interesse.

Erweitert man die Untersuchungen zu größeren Fortschrittsgraden und berücksichtigt dabei das Absenken der Rotordrehzahl, ergibt sich prinzipiell ein Stabilitätsverhalten nach [Bild 4.7](#). Aufgetragen sind Real- und Imaginärteile des zugehörigen Systems mit konstanten Koeffizienten für drei verschiedene Anschlußsteifigkeiten. Man erkennt sofort das im vorausgegangenen Kapitel beschriebene typische Verhalten parametererregter Systeme.

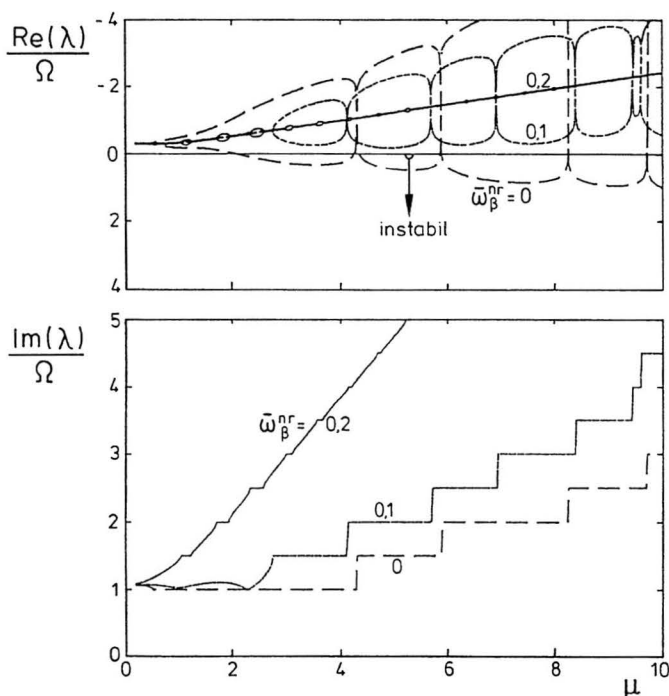


Bild 4.7 Verlauf der Eigenwerte der Schlagbewegung für verschiedene Anschlußsteifigkeiten (bei Modellierung der Rückanströmung)

Bei großen Anschlußsteifigkeiten ist der Einfluß der Periodizitäten vergleichsweise klein; die Eigenfrequenz rastet jeweils nur kurzzeitig auf ein $\Omega/2$ -Vielfaches ein und die Destabilisierung des kritischen Realteils bleibt gering. Für eine kleine Ersatzfederkonstante dagegen folgen die Resonanzgebiete dicht aufeinander und die Realteile weichen erheblich von dem konstanten Dämpfungsmittelwert ab.

In den folgenden Kapiteln wird dieses Verhalten nun im Detail analysiert. Zum einen sind bestimmte vereinfachende Annahmen bei der Modellierung auf ihre Zulässigkeit zu überprüfen, zum anderen werden wichtige konstruktive Parameter variiert und ihr Einfluß auf die Schlagstabilität untersucht. Die Rechnungen erfolgten wie beschrieben mittels der FLOQUET-Theorie für die auf Zustandsraumdarstellung transformierte Schlagdifferentialgleichung (4.8):

$$\underline{x}' = \underline{A}(\psi)\underline{x} \quad (4.32)$$

$$\text{mit } \underline{x} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta' \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{A}(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma K(\psi) - K_0 & -\gamma D(\psi) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

In den abgebildeten Diagrammen ist von den beiden Realteilen zumeist nur der kritische aufgetragen, und auf die Darstellung der zugehörigen Frequenzen wird ganz verzichtet. Es gelten, sofern nicht anders vermerkt, in allen Fällen die Referenzdaten aus Anhang A.1.

4.3.2.1 Einfluß der Rückanströmung

Betrachtet man das einzelne Blattelement, führt die Vernachlässigung der Rückanströmung in bestimmten Bereichen des Rotorumlaufs zu Luftkräften, die in die physikalisch "falsche" Richtung weisen, siehe Kap. 2.5.2. Die Auswirkung dieses Fehlers auf die Koeffizienten der Schlagdifferentialgleichung verdeutlicht Bild 4.8.

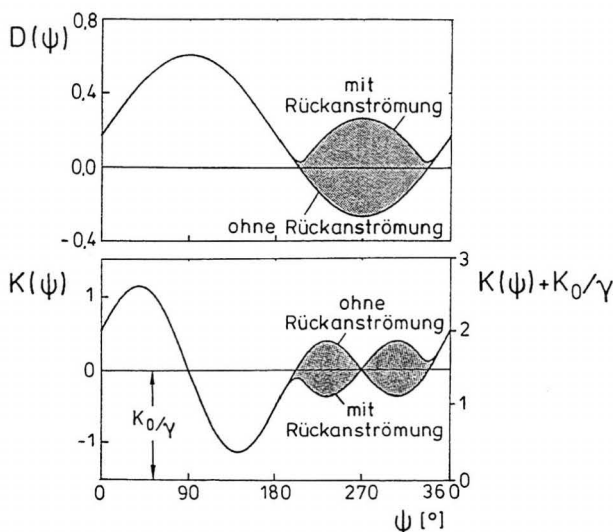


Bild 4.8 Einfluß der Rückanströmung auf die periodischen Koeffizienten
($\mu = 2$, $\bar{\omega}_s^{nr} = 0.2$)

Die Werte sowohl des Dämpfungs- als auch des Steifigkeitsterms wechseln im Rückanströmgebiet ihr Vorzeichen. Während sich beim $K(\psi)$ -Koeffizient zwar der Verlauf, nicht aber Mittelwert und Maximalwerte ändern, ist der Einfluß auf $D(\psi)$ bedeutender. Ohne Rückanströmung ergeben sich für einen großen Bereich des Umlaufwinkels negative Dämpfungen, obwohl die Luftkräfte (zumindest bei der vorliegenden Einfreiheitsgradbetrachtung mit quasistationärer Aerodynamik) physikalisch der Blattbewegung immer entgegengerichtet sind. Außerdem verschiebt sich der Dämpfungsmittelwert, dessen Bedeutung im Zusammenhang mit den Grenzkurven in der STRUTTSchen Karte diskutiert wurde.

Um den Einfluß der Rückanströmung auf die Schlagstabilität zu veranschaulichen wird, wie später in anderem Zusammenhang noch mehrfach, auf Stabilitätskarten zurückgegriffen. Statt der formalen Differentialgleichungsparameter K_o und K_c der STRUTTSchen Karte werden dabei jedoch die mit dem Stillsetzungsproblem verbundenen physikalischen Größen $\bar{\omega}_\beta^{nr2}$ und μ als unabhängige Variablen gewählt. In Bild 4.9 sind die Stabilitätsdiagramme für die Fälle ohne und mit Berücksichtigung der Rückanströmung gegenübergestellt.

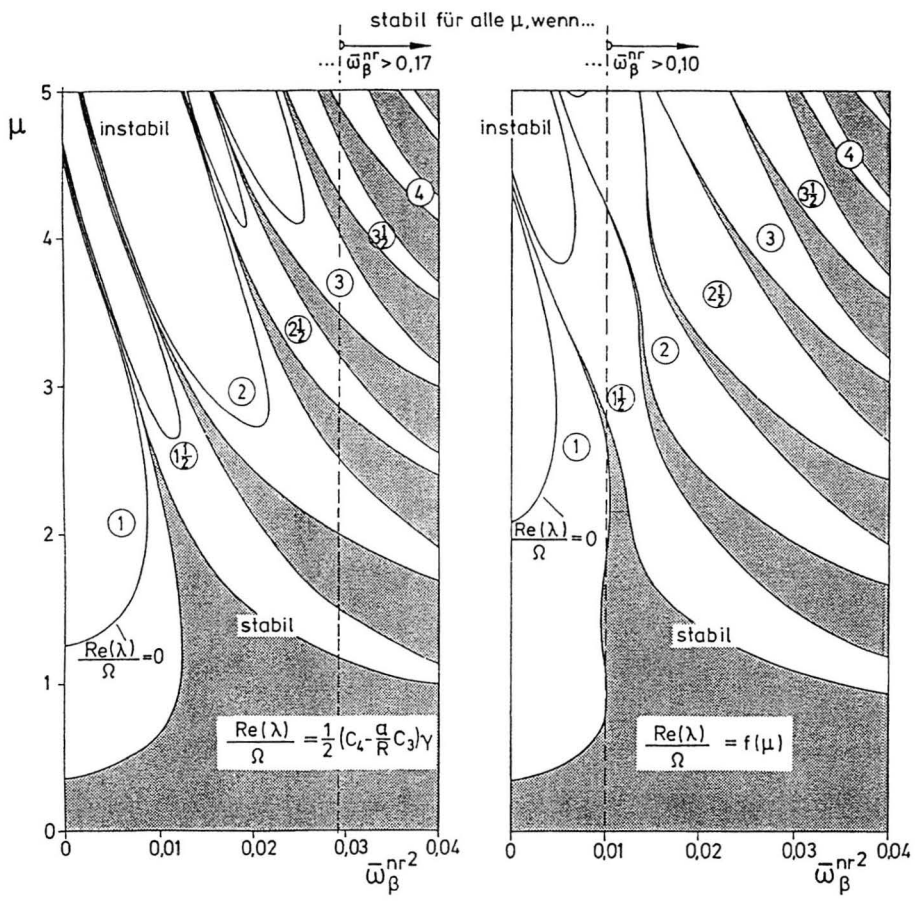


Bild 4.9 Stabilitätskarten für die Schlagbewegung links ohne und rechts mit Berücksichtigung der Rückanströmung

Man erkennt sofort die typische aus der STRUTTSchen Karte bekannte Struktur. Gekennzeichnet sind zum einen die Gebiete ohne Parameterresonanz (dunkel gerastert) und zum anderen die Stabilitätsgrenzen mit $\text{Re}(\lambda)/\Omega = 0$. Es wird erneut deutlich, daß im Fall ohne Rückanströmung eine Anschlußsteifigkeit von $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.17$ genügt, um Stabilität (auch für $\mu > 5$, siehe [Bild 4.11](#)) sicherzustellen. Bei Modellierung der Rückanströmung ergeben sich neben gewissen Änderungen im Verlauf der Bereichsgrenzen insbesondere Unterschiede bei den Stabilitätsgrenzen. Diese ziehen sich zu kleineren Ersatzfederkonstanten und größeren Fortschrittsgraden zurück, womit die Blattbewegungen schon mit $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.10$ stabil bleiben. Die Ursache liegt jedoch nicht im leicht geänderten Verlauf der Parameterresonanzgebiete, sondern in dem mit μ anwachsenden Dämpfungsmittelwert. Betrachtet man die zugehörigen Stabilitätsgebiete in [Bild 4.10](#), wird dieser Effekt besonders deutlich.

Im Fall mit Rückanströmung wachsen die Realteile in den Gebieten ohne Parameterresonanz unabhängig von der Anschlußsteifigkeit linear mit dem Fortschrittsgrad. Dadurch wird das gesamte Gebirge zu stabileren Werten angehoben und die Ausdehnung der Gebiete, die unter der Grenzebene $\text{Re}(\lambda)/\Omega = 0$ liegen, geht zurück.

Anhand der Stabilitätskarten in [Bild 4.9](#) wird nun auch für die Schlagdifferentialgleichung deutlich, wie man trotz der Mehrdeutigkeit bei Anwendung der FLOQUET-Theorie jedem Parameterresonanzbereich ein bestimmtes $\Omega/2$ -Vielfaches zuordnen kann. Die Grenzen der Resonanzgebiete ziehen sich jeweils rechts von den abgebildeten Ausschnitten (also nicht am unteren Rand wie in der STRUTTSchen Karte) für wachsende Anschlußsteifigkeiten zusammen und gehen dabei in Hyperbeln über. Bei sehr großen $\bar{\omega}_\beta^{nr}$ können Luft- und Zentrifugalkräfte vernachlässigt werden, womit die Schlagdifferentialgleichung in die Form von Gl. (2.14) übergeht. Die zugehörige Eigenfrequenz lautet mit Gl. (2.13) und Gl. (4.10) dann näherungsweise

$$\frac{\text{Im}(\lambda)}{\Omega} \approx \sqrt{K_0} \approx \frac{1}{\mu_{nenn}} \bar{\omega}_\beta^{nr} \mu . \quad (4.34)$$

und ermöglicht die Zuordnung der Hyperbeläste zu den diskreten Frequenzen $\text{Im}(\lambda) = n\Omega/2$ der Parameterresonanzen.

Wie aus den Stabilitätskarten zu ersehen, reicht der Bereich bis $\mu = 5$ jedoch nicht aus, um das Stabilitätsverhalten für $\mu \rightarrow \infty$ sicher voraussagen zu können. Daher wurden für ausgewählte Anschlußsteifigkeiten Schnitte durch die Stabilitätsgebirge bis $\mu = 30$ berechnet. Bild 4.11 vergleicht wieder die Ergebnisse ohne und mit Modellierung der Rückanströmung.

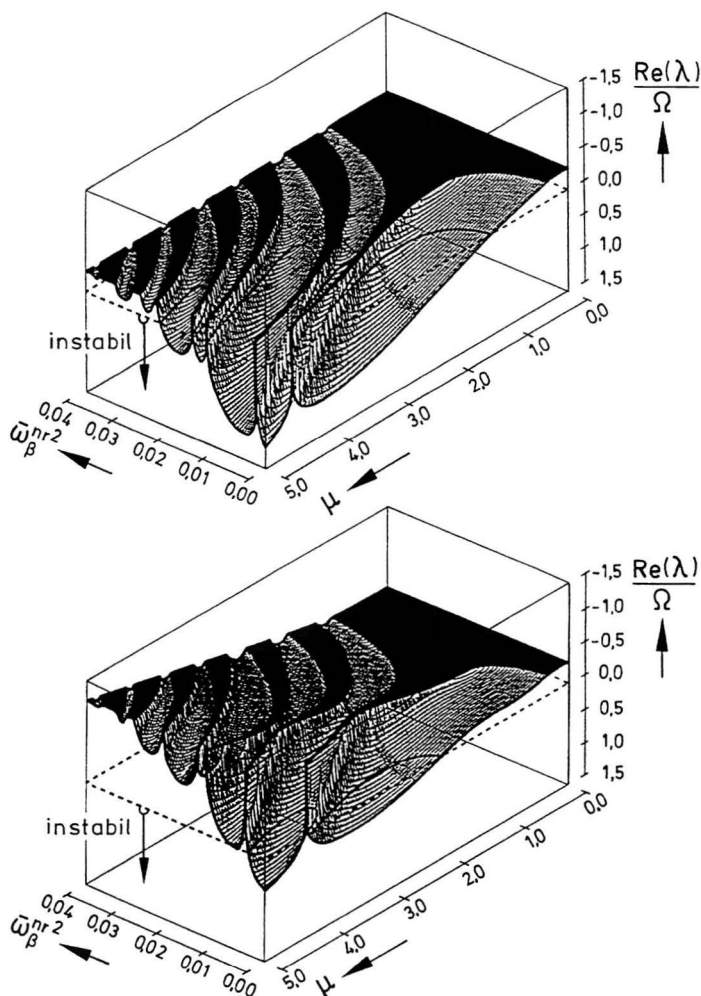


Bild 4.10 Stabilitätsgebirge für die Schlagbewegung oben ohne und unten mit Berücksichtigung der Rückanströmung

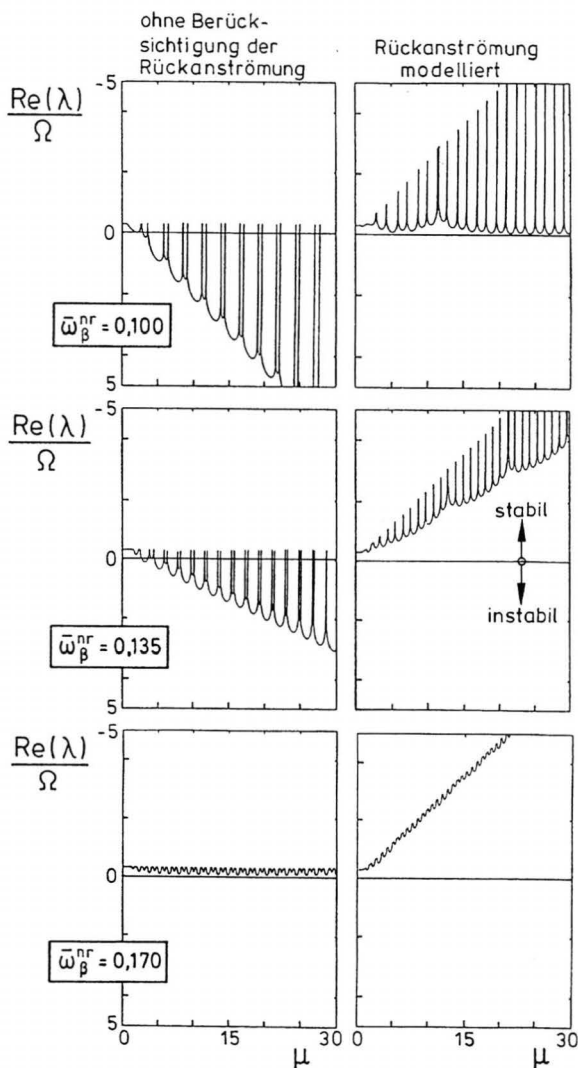


Bild 4.11 Schlagstabilität für verschiedene Anschlußsteifigkeiten links ohne und rechts mit Berücksichtigung der Rückanströmung

Man erkennt zunächst, daß bei Vernachlässigung der Rückanströmung die mehrfach genannte Steifigkeit von $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.170$ tatsächlich für alle Fortschrittsgrade Stabilität gewährleistet. Die Struktur der Parameterresonanzen zeigt jenen Wechsel von schmalen und

breiten Gebieten, der sich auch aus dem Verlauf der beiden Stillsetzungskurven durch die STRUTTschen Karten ergibt: die schmalen Gebiete gehen auf den 1Ω -, die breiteren auf den 2Ω -Anteil des Steifigkeitskoeffizienten zurück. Ferner ergibt sich, daß für das Stabilitätsverhalten weniger die Realteile für einen bestimmten Fortschrittsgrad, als vielmehr der von der Anschlußsteifigkeit abhängige Gradient der Maximalwerte über μ ausschlaggebend ist.

Es wird aber auch ganz deutlich, daß man im Fall ohne Berücksichtigung der Rückanströmung unnötig hohe Anschlußsteifigkeiten für die Blattauslegung fordern würde. Das genauere Modell sagt Schlagstabilität während der gesamten Stillsetzungsphase schon für Ersatzfedern ab $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0.10$ voraus. Dieser Wert liegt insbesondere auch deutlich unter der Grenze für statische Stabilität (vgl. Kap. 4.2). Gelenklose Rotoren heutiger Hubschrauber besitzen Anschlußsteifigkeiten in der Größenordnung von $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0.15$.

Das spezielle Verhalten parametererregter Systeme wie auch der Einfluß der Rückanströmung wird besonders deutlich anhand der entsprechenden Wurzelortskurven. Bild 4.12 zeigt derartige Diagramme für eine Anschlußsteifigkeit von $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0.135$.

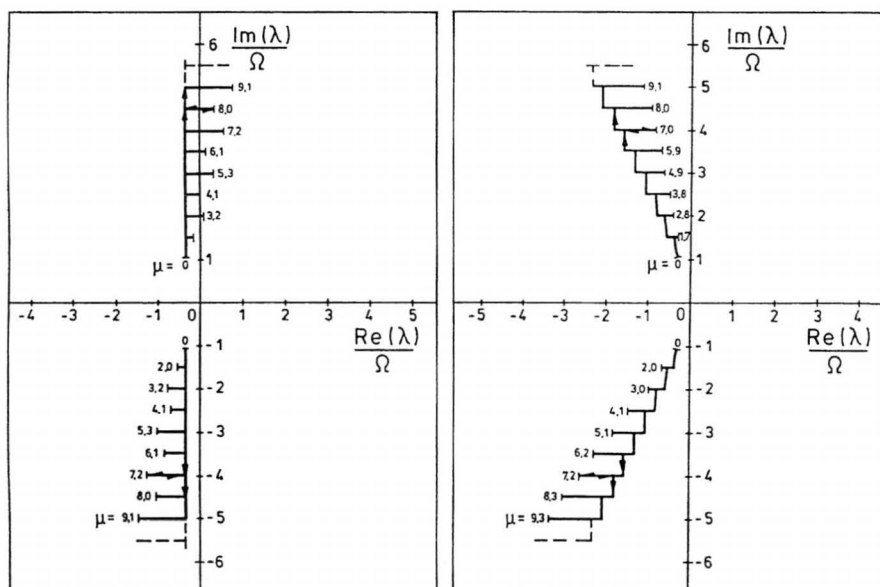


Bild 4.12 Wurzelortskurven der Schlagbewegungseigenwerte während der Rotorstillsetzung ($\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0.135$)

Man erkennt, wie die Eigenfrequenzen nacheinander auf steigende $\Omega/2$ -Vielfache einrasten und wie die in der oberen Halbebene dargestellten kritischen Pole dabei jeweils destabilisiert werden. Außerdem läßt sich für den Fall mit Rückanströmung nachvollziehen, wie der mit dem Fortschrittsgrad ansteigende Dämpfungsmittelwert die kritischen Äste der Wurzelortskurve in die stabile Halbebene zieht.

Anhand der Wurzelortskurven sei noch kurz auf ein Näherungsverfahren eingegangen, welches bei Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Hubschrauberrotoren häufig eingesetzt wird. Die periodischen Anteile in den Differentialgleichungskoeffizienten werden dabei durch ihre Mittelwerte ersetzt, womit das periodische System in ein entsprechendes mit konstanten Koeffizienten übergeht. Dieses Vorgehen ist in [78] für die Schlagbewegung beschrieben, wird häufig aber auch bei der Untersuchung anderer Blattfreiheitsgrade (siehe z.B. [86]) oder gekoppelter Rotor/Zellen-Instabilitäten angewandt. Einige Autoren weisen darauf hin, daß diese Näherung jenseits von $\mu = 0.5$ zunehmend an Gültigkeit verliert. In Bild 4.13 sind Wurzelortskurven für zwei unterschiedliche Blattauslegungen dargestellt, wie sie sich nach dieser Methode ergeben.

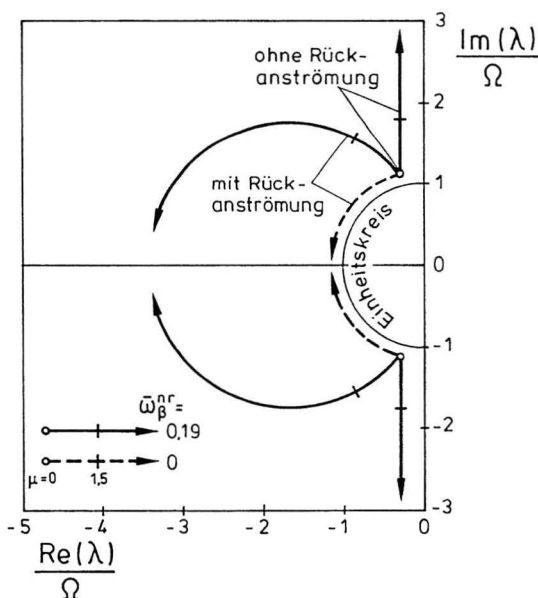


Bild 4.13 Wurzelortskurve für die durch Mittelwertbildung gewonnene "Konstante-Koeffizienten"-Näherung

Bei Vernachlässigung der Rückanströmung liegt die berechnete Dämpfung wieder unabhängig vom Fortschrittsgrad bei $\text{Re}(\lambda)/\Omega = \gamma(C_4 - \frac{a}{R}C_3)/2$, während sie mit Rückanströmung monoton ansteigt. Da der luftkraftabhängige Steifigkeitsanteil $K(\psi)$ mittelwertfrei ist (vgl. Anhang A.5 Bild A.1), kann er in dieser Näherung auf das Systemverhalten keinen Einfluß nehmen. So bleibt das Verhältnis von Eigenfrequenz des zugehörigen ungedämpften Systems und Rotorkreisfrequenz für ein gelenkig angeschlossenes Blatt ($\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0$) konstant, während es bei steifem Blattanschluß mit Absenken der Rotordrehzahl (wie z.B. Bild 4.2 zu entnehmen) wächst. Wie ein Vergleich mit Bild 4.12 auf den ersten Blick zeigt, darf der Einfluß der Parameterresonanzen hier natürlich nicht vernachlässigt werden, d.h. eine derartige Näherung ist bei der Rotorstillsetzung nicht zulässig. Allein die Vergrößerung der Dämpfung bei Berücksichtigung der Rückanströmung wird qualitativ richtig wiedergegeben.

Die behandelten Beispiele zeigen also deutlich, wie groß der Einfluß der Rückanströmung auf die Stabilitätsergebnisse ist. Daher wurde bei den im folgenden dargestellten Untersuchungen immer, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, die Rückanströmung berücksichtigt.

4.3.2.2 Einfluß der Schlageligenform

Für alle bisher beschriebenen Rechnungen wurden die Ersatzgrößen fiktiver Schlaggelenkabstand und Ersatzfedersteifigkeit über der Rotordrehzahl konstant gehalten. Damit läßt sich nach Kap. 2.3.2 zwar der Eigenfrequenzverlauf hinreichend genau beschreiben, die erste Schlagbiegeeigenform wird jedoch nur für hohe Drehzahlen verhältnismäßig gut angenähert. Um den Einfluß der Eigenform abzuschätzen, wurden daher Rechnungen mit drehzahlabhängigen Ersatzgrößen a/R und $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}}$ durchgeführt. Die in Bild 2.7 angegebenen Verläufe entsprechen nach der dort beschriebenen Tangentennäherung fast genau einem Blatt, das näherungsweise durch die konstanten Ersatzgrößen $a/R = 0.13$ und $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0.100$ beschrieben werden kann. Bild 4.14 vergleicht die Stabilitätswerte für beide Modelle.

Im Referenzfall mit konstanten Ersatzgrößen bleibt, wie schon im letzten Kapitel gezeigt, die Schlagbewegung für alle Fortschrittsgrade stabil. Mit den nachgeführten Größen ergibt sich mit μ zunehmend instabiles Verhalten. Ursache sind zum einen die mit sinkender

Drehzahl anwachsenden Schlaggelenkabstände, die aus den bauchiger werdenden Eigenformen folgen (vgl. Bild 2.6), zum anderen die damit verbundene Erhöhung der Blattmassenkonstanten. Beides wirkt sich, wie in Kap. 4.3.1 angedeutet bzw. im nächsten Kapitel durch Rechnungen belegt, nachteilig auf die Stabilität aus.

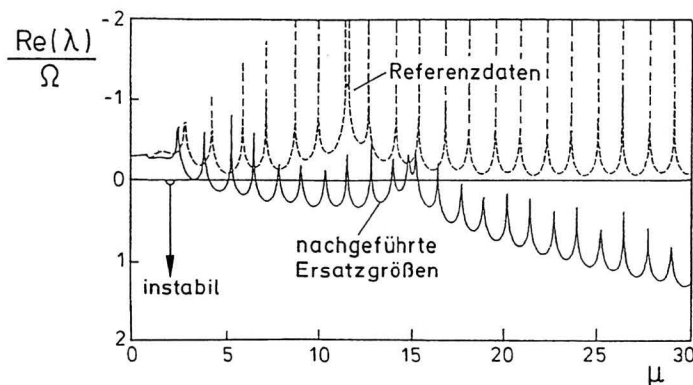


Bild 4.14 Einfluß der Schlageigenform auf die Stabilität (Ersatzgrößen aus Bild 2.7)

Somit hat die Eigenform zumindest in der hier verwendeten Näherung einen deutlichen Einfluß auf das Stabilitätsverhalten. Es erscheint demnach als sinnvoll, bei der Modellierung des Blattes nicht nur die Eigenfrequenzen sondern die gesamten elastischen Eigenschaften möglichst gut abzubilden. Da aber eine genauere Modellierung des Blattes als elastischer Körper unter Zentrifugal- und Luftkrafteinfluß einen erheblichen mathematischen Aufwand erfordern würde, wird zur Klärung der hier interessierenden eher grundsätzlichen Fragestellungen weiter das einfache Modell mit konstanten Ersatzgrößen verwendet.

4.3.2.3 Variation konstruktiver Parameter

Neben der Blattanschlußsteifigkeit lassen sich weitere in den Gleichungen auftretende Parameter durch die konstruktive Gestaltung des Blattes beeinflussen. Daher ist zu klären, wie sich das Stabilitätsverhalten bei Variation dieser Parameter verändert. In Bild 4.15 sind die Ergebnisse mehrerer Rechnungen zusammengestellt, wobei wieder vom Referenzfall mit den üblichen Daten (siehe Anhang A.1) ausgegangen wird (linke Spalte).

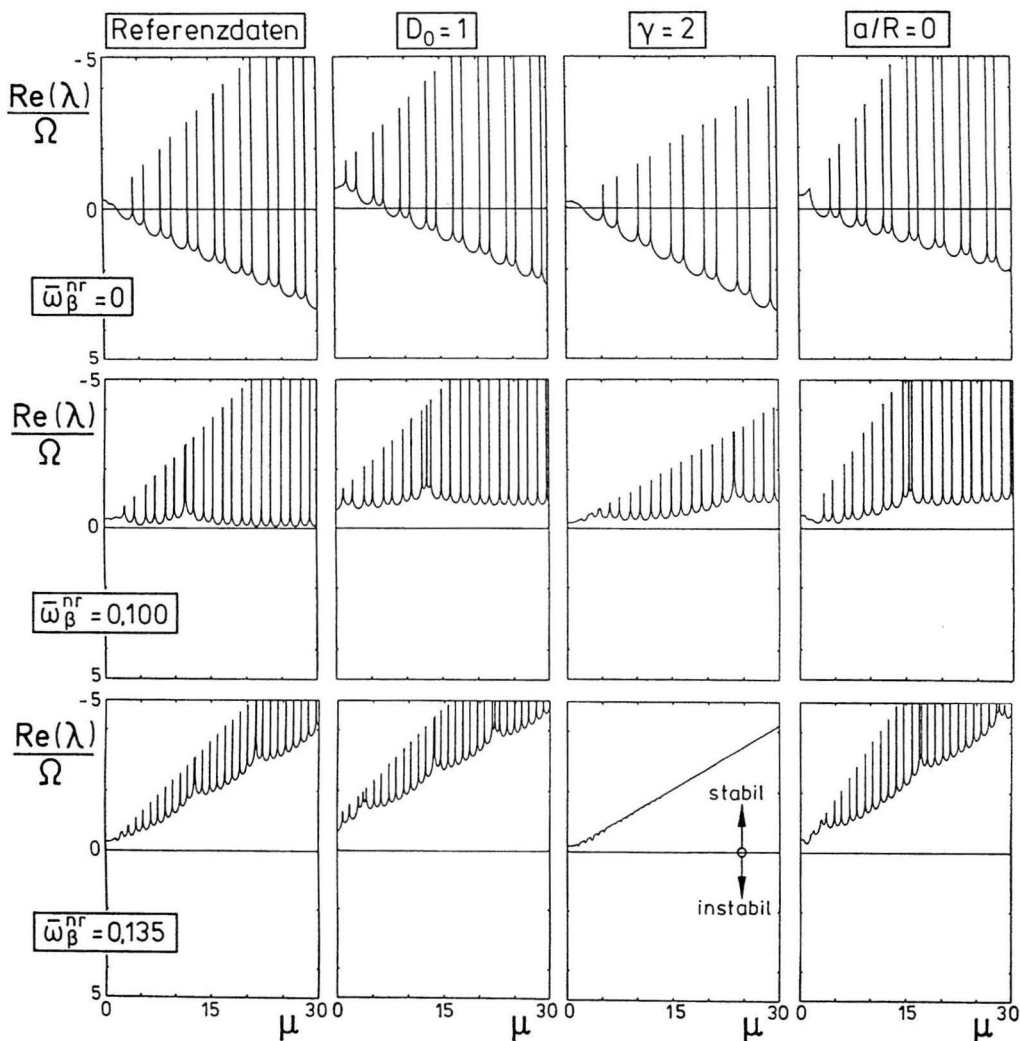


Bild 4.15 Einfluß konstruktiver Parameter auf die Schlagstabilität
(Referenzwerte: $D_0 = 0$, $\gamma = 3.5$, $a/R = 0.13$)

Für die in der zweiten Spalte dargestellten Rechnungen wurde in die Schlagdifferentialgleichung ein zusätzlicher konstanter Dämpfungsterm D_0 aufgenommen, wie er zur Modellierung eines mechanischen Blattdämpfers anzusetzen wäre. Die homogene Gleichung lautet dann

$$\beta'' + \left[\gamma D(\psi) + 2D_0 \right] \beta' + \left[\gamma K(\psi) + K_0 \right] \beta = 0 \quad . \quad (4.35)$$

Die wichtigsten Auswirkungen auf das Stabilitätsverhalten sind schon in Kap. 4.3.1 beschrieben. Zum einen werden alle bezogenen Realteile um den Betrag D_0 verringert, was zur Stabilisierung beiträgt, zum anderen verschieben sich die Parameterresonanzen parallel zur μ -Achse entsprechend der D^2 -Verschiebung parallel zur K_0 -Achse in der STRUTT-schen Karte. Entscheidend ist, daß der Gradient des Stabilitätsverlaufs über dem Fortschrittsgrad von der konstanten Dämpfung nicht beeinflusst wird. Damit läßt sich mit großen Dämpfungen das Einsetzen von Instabilitäten zwar hinauszögern, bei zu kleiner Anschlußsteifigkeit jedoch nicht grundsätzlich beseitigen.

Mit den Rechnungen der dritten Spalte werden die Überlegungen zum Einfluß der Blattmassenkonstanten bestätigt; kleine Werte wirken sich aus den genannten Gründen positiv auf das Stabilitätsverhalten aus. Der gewählte Wert von $\gamma = 2$ ergibt sich entweder durch Verringerung der Blattiefe auf $l_{Bl} = 0.17$ m oder Vergrößern der Blattmassenbelegung auf ca. $\bar{m} = 13$ kg/m. Der fiktive Schlaggelenkabstand wurde hier noch konstant gehalten, da er über die C_n auch an anderer Stelle in die Rechnung eingeht (siehe unten).

In der letzten Spalte finden sich schließlich die Ergebnisse zum Einfluß des Schlaggelenkabstandes. Die Rechnungen betreffen den theoretischen Grenzfall des zentralen Schlaggelenks $a/R = 0$, wobei die Blattmassenbelegung so angepaßt wurde, daß die Blattmassenkonstante unverändert bleibt. Die Verläufe zeigen, daß sich das Stabilitätsverhalten ebenfalls etwas verbessert. Die Erklärung hierfür findet sich in der unterschiedlichen Auswirkung vergrößerter C_n auf die Koeffizienten $D(\psi)$ und $K(\psi)$. Während im Steifigkeitskoeffizienten nur die Amplitude wächst, erhöht sich im Dämpfungskoeffizienten gleichzeitig auch der Mittelwert. Dieser gestiegene Mittelwert überkompensiert den Einfluß stärkerer Periodizitäten, wie man gut im Diagramm für $\bar{\omega}_\beta'' = 0.135$ erkennt. Dort sind die Parameterresonanzen stärker ausgebildet als im Referenzfall und dennoch ist der Gradient der Realteil-Maximalwerte (also der Verlauf der jeweils kritischen Werte) über μ etwas steiler.

Zu beachten ist, daß bei Änderungen der Blattmasse oder des Schlaggelenkabstandes aber unverändertem $\bar{\omega}_\beta''$ die Federsteifigkeit c_β angepaßt werden muß, da das Blattträgheitsmoment in die Definition für die dimensionslose Anschlußsteifigkeit eingeht. Ferner bleibt anzumerken, daß in allen hier betrachteten Fällen monotone Parameteränderungen, sofern sie sich auf den technisch sinnvollen Bereich beschränken, die Stabilitätsgrenzen in jeweils nur eine Richtung verschieben.

Eine häufig eingesetzte Methode zur Verbesserung der Schlagstabilität und zur Begrenzung der Antwortamplituden ist die sogenannte Schlagwinkelrücksteuerung. Dabei wird der Blatteinstellwinkel proportional zum Schlagwinkel angesteuert.

$$\vartheta_{St} = -\beta \tan \delta_3 \quad (4.36)$$

Für die Differentialgleichung bedeutet dies eine Erweiterung im Steifigkeitsterm der Form

$$\beta'' + \gamma D(\psi) \beta' + \left[\gamma \{K(\psi) + E_2(\psi) \tan \delta_3\} + K_0 \right] \beta = 0 \quad (4.37)$$

Die Beschreibung des Rückkopplungsfaktors durch $\tan \delta_3$ bezieht sich auf eine einfache Möglichkeit, die Rücksteuerung technisch zu realisieren. Diese besteht darin, die Schlaggelenkachse um den Winkel δ_3 gedreht anzuordnen (bei einem gelenkigen Rotor); näheres entnehme man [36] oder [37]. Grundlegende Überlegungen zur Anwendung der δ_3 -Rücksteuerung finden sich in [81], wobei auch die Auswirkungen auf die Schlagstabilität behandelt werden. Die Untersuchungen enden jedoch bei Fortschrittsgraden von $\mu = 1.4$.

Den Einfluß der Rücksteuerung auf die Schlagstabilität bei der Stillsetzung verdeutlicht Bild 4.16. Für das dargestellte Beispiel wurde $\delta_3 = 45^\circ$ gewählt, d.h. der Blatteinstellwinkel wird um den selben Betrag verringert, um den der Schlagwinkel wächst. Wie vorteilhaft sich eine derartige Gegenkopplung im Prinzip auswirken könnte, zeigen die Ergebnisse für den Fall ohne Rückanströmung (oben). Die Rücksteuerung entspricht einer künstlichen Versteifung und stabilisiert die Schlagbewegung erheblich.

Ungünstigerweise kehrt sich im Rückanströmgebiet die Zuordnung von Einstellwinkel und damit erzeugtem Zusatzauftrieb um, was nur bei Berücksichtigung der Rückanströmung richtig erfaßt wird (unten). In diesem Fall beschränkt sich die stabilisierende Wirkung auf den Bereich kleiner Fortschrittsgrade. Ab ca. $\mu = 5$ verschlechtert sich das Verhalten mit Rücksteuerung jedoch deutlich. Durch die über dem Umlauf wechselnde Zuordnung zwischen Steuerwinkel und Schlagmoment werden die periodischen Anteile im Steifigkeitskoeffizienten noch vergrößert und das System destabilisiert. Gleiches gilt für negative Winkel δ_3 (entsprechend einer Mitkopplung), wobei sich dann auch bei kleinen Fortschrittsgraden eine Verschlechterung ergibt. Weitere Betrachtungen zur Stabilisierung durch aktive Steuerung des Einstellwinkels folgen in Kap. 6.3.2.1.

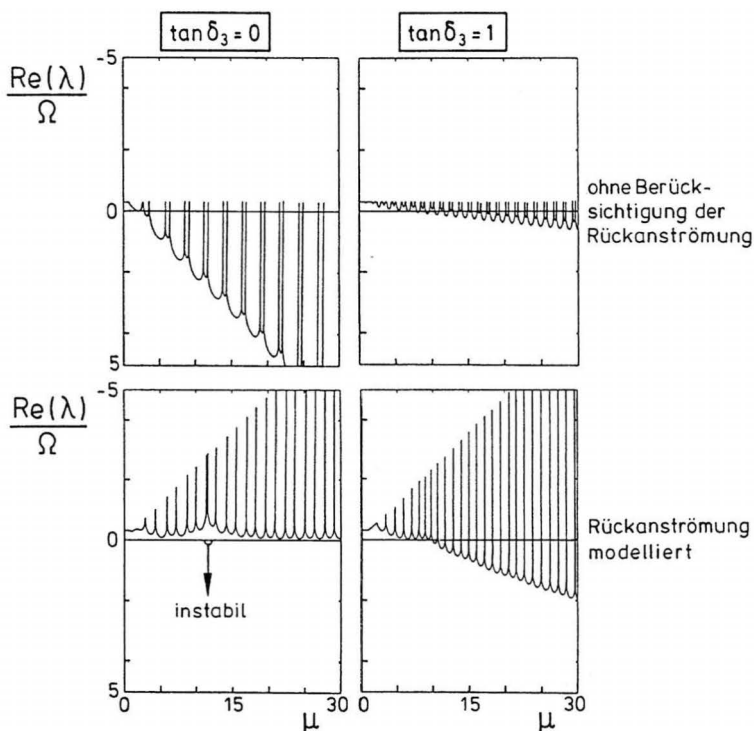


Bild 4.16 Einfluß der Schlagwinkelnrücksteuerung auf die Stabilität ($\bar{\omega}_\beta^{\text{pr}} = 0.1$)

Zusammenfassend muß festgestellt werden, daß eine Vergrößerung der Anschlußsteifigkeit die wirkungsvollste konstruktive Maßnahme zur Verbesserung der Schlagstabilität darstellt. Wie in Kapitel 4.4 gezeigt wird, sind in Hinblick auf die erzwungenen Schwingungen noch wesentlich steifere Blattanschlüsse erforderlich, so daß die Schlagstabilität in dieser Hinsicht i.a. keinen begrenzenden Faktor für die Rotorstillsetzung darstellt.

4.3.3 Stabilitätsrechnungen bei nichtlinearer Aerodynamik

Wie in Kap. 2.5.3 erläutert verliert das lineare Aerodynamikmodell in bestimmten Bereichen der Rotorkreisscheibe an Gültigkeit. Daher ist zu untersuchen, welche Auswirkungen die verwendeten Vereinfachungen auf die berechnete Schlagstabilität haben. In diesem Kapitel wird zunächst nur das homogene Problem behandelt, auch wenn die Stabilität im

nichtlinearen Fall natürlich nicht mehr unabhängig von der partikulären Lösung zu behandeln ist. Kap. 4.4.3 wird zeigen, daß allein der konstante Term infolge des Blattgewichtes periodische Lösungen erzeugt, die die Stabilität erheblich beeinflussen. Da es sich bei einem Betriebszustand mit kleiner oder verschwindender periodischer Antwort jedoch um den anzustrebenden Idealzustand handelt, liefern die hier betrachteten Ergebnisse dennoch eine wichtige Aussage. Sie beschreiben den Einfluß des in jedem Fall auftretenden Abreißens beim Übergang zur Rückanströmung und dienen insbesondere auch zur Überprüfung der Ansätze zur analytischen Berücksichtigung der Rückanströmung.

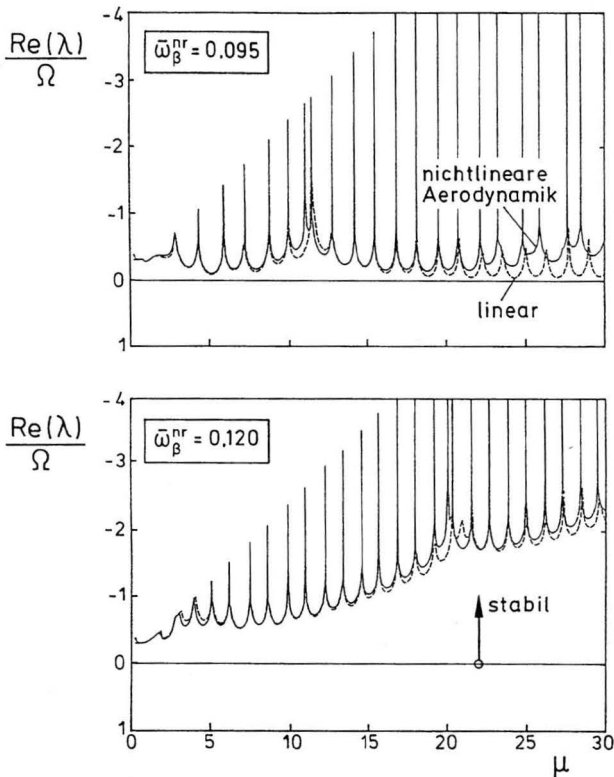


Bild 4.17 Vergleich von Ergebnissen zur Schlagstabilität für das lineare und das nichtlineare Aerodynamikmodell

Das genauere, nichtlineare Modell beruht auf den Gleichungen (2.42) bis (2.47) und verwendet die Beiwertverläufe aus [Bild A.7](#) (oben und Mitte). Die durch Windkanalmessungen ermittelten Abhängigkeiten der Luftkraftbeiwerte von Anstellwinkel und MACH-Zahl werden

dabei abschnittsweise durch analytische Funktionen beschrieben, siehe [35]. Die Anzahl der diskreten Blattstützstellen wurde nach Vergleichsrechnungen mit dem linearen Modell auf 21 festgelegt, integriert wurde nach SIMPSON. Die Rechenzeit erhöhte sich gegenüber der analytischen Formulierung um ca. 50%. Die Bestimmung der Eigenwerte erfolgte nach dem modifizierten FLOQUET-Verfahren durch Störung der (hier trivialen) partikulären Lösung um $\varepsilon = 0.001$.

In Bild 4.17 sind die Ergebnisse bei Verwendung der linearen bzw. der nichtlinearen Aerodynamik für zwei unterschiedliche Anschlußsteifigkeiten gegenübergestellt. In beiden Fällen zeigt sich eine bemerkenswert gute Übereinstimmung der Realteile über fast den gesamten Fortschrittsgradbereich. Lediglich bei sehr großen μ liefert die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten etwas stabilere Werte. Daß insbesondere auch die Stabilitätsgrenze der homogenen Gleichung mit der Näherung gut beschrieben wird, beweist Bild 4.18.

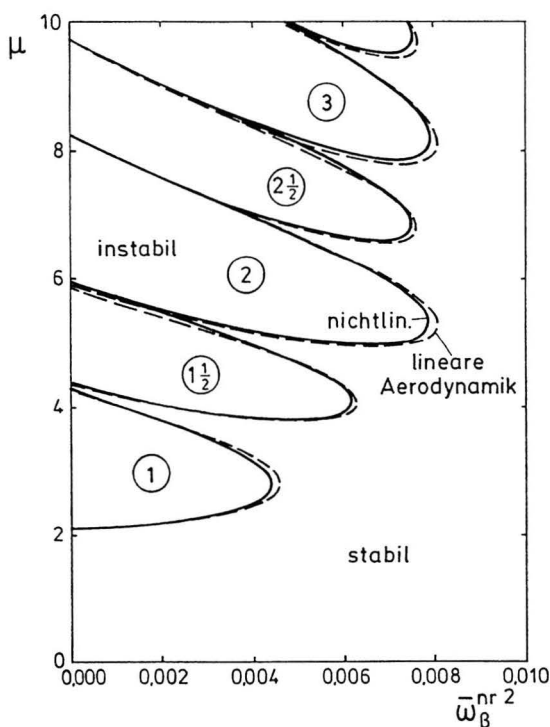


Bild 4.18 Stabilitätskarte der Schlagbewegung, berechnet mit dem linearen und dem nichtlinearen Aerodynamikmodell

Dargestellt ist eine Stabilitätskarte ähnlich zu Bild 4.9 , jedoch mit geändertem Maßstab und ohne die Kennzeichnung der Gebiete mit Parameterresonanz. Die Stabilitätsgrenzen weichen für beide Fälle im betrachteten Bereich nur geringfügig voneinander ab. Damit belegen die Resultate - zumindest für das (homogene) Stabilitätsproblem - die Anwendbarkeit der linearen Näherungen und der beschriebenen Methode zur analytischen Berücksichtigung der Rückanströmung.

4.4 Berücksichtigung der Störfunktion

Bei Betrachtung der Stabilität unter Einbeziehung nichtlinearer Effekte, aber auch im Zusammenhang mit der konstruktiven Auslegung von Stopp-Rotoren spielt das Antwortverhalten eine entscheidende Rolle. Nur wenn die Amplituden der erzwungenen Schwingungen hinreichend klein bleiben, lassen sich die behandelten linearen Näherungen anwenden. Außerdem ist die Kenntnis der auftretenden partikulären Lösungen erforderlich, um die flugmechanisch wichtigen stationären Rotorkräfte und -momente vorhersagen zu können.

Aus der rechten Seite der Schlagdifferentialgleichung Gl. (4.8) folgt sofort, daß sich die Störfunktion niemals vollständig unterdrücken läßt. Der konstante Term F_0 beschreibt den Einfluß der Blattgewichte und gewinnt beim Stillsetzen mit sinkenden Zentrifugalkräften zunehmend an Bedeutung. Aber auch die periodischen Terme lassen sich aus folgenden Gründen i.a. nicht vollständig ausschalten.

- Auf eine Verwindung ϑ_1 der Blätter könnte ggf. verzichtet werden, womit sich jedoch die Schwebefugleistungen verschlechtern würden.
- Der Durchflußgrad δ fällt für den entlasteten, tangential angeströmten Rotor zwar theoretisch auf null, in der Praxis werden aber durch die Blattbewegungen verursachte dynamische Abwindkomponenten und Interferenzen mit den Flügeln diesen Idealzustand stören.
- Schließlich wird man auf eine Steuerung der Rotoren über die Blatteinstellwinkel ϑ_{st} nicht ganz verzichten können (siehe auch die Betrachtungen in Kap.6) und dadurch eine weitere, wenn auch gezielte und deshalb i.a. stabilisierende "Anregung" hinzufügen.
- Noch nicht berücksichtigt sind dabei äußere Störungen durch Böen oder Turbulenzen, die ebenfalls einen Beitrag zur rechten Seite der Differentialgleichung liefern würden.

Wie bei den Stabilitätsuntersuchungen sollen auch hier einige prinzipielle Eigenschaften anhand der MATHIEUSchen Gleichung erläutert werden, bevor sich die Behandlung der inhomogenen Schlagdifferentialgleichung anschließt.

4.4.1 Die partikuläre Lösung der MATHIEUSchen Differentialgleichung

Ebenso wie die Stabilität zeigt auch das Antwortverhalten parametererregter Systeme deutliche Abweichungen von dem entsprechender konstanter Systeme. Zur Erinnerung zeigt Bild 4.19 die Verhältnisse für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und periodischer Störfunktion.

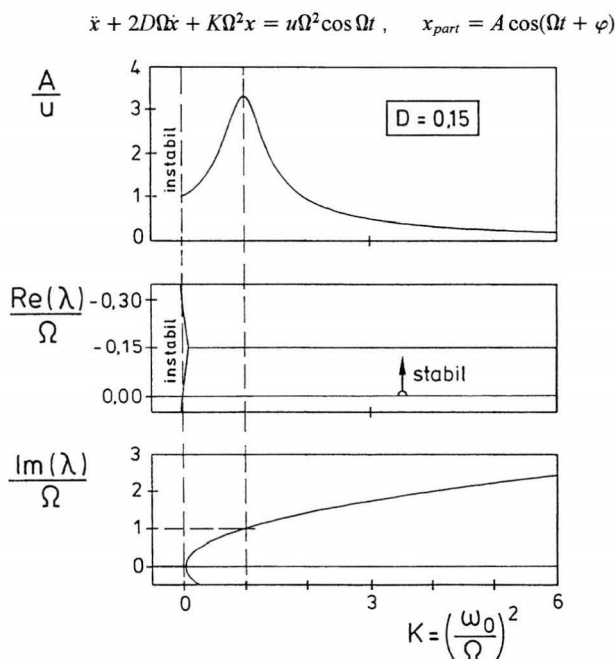


Bild 4.19 Amplitudenverlauf und Stabilität einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und periodischer Störfunktion

Angepaßt an die hier verwendete Nomenklatur lautet die Gleichung

$$\ddot{x} + 2D\Omega\dot{x} + K\Omega^2x = u\Omega^2\cos\Omega t. \quad (4.38)$$

Als partikuläre Lösung erhält man

$$x_{part} = A \cos(\Omega t + \varphi) \quad (4.39)$$

mit der Amplitudenfunktion
$$\frac{A}{u} = \frac{1}{\sqrt{(K-1)^2 + 4D^2}} .$$

Die Stabilität wird beschrieben durch die Eigenwerte

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\Omega} = -D \pm \sqrt{D^2 - K} . \quad (4.40)$$

In dem Bereich, wo die Systemsteifigkeit K zu einer Übereinstimmung von Eigenfrequenz und Erregerfrequenz führt, ergibt sich eine von der Dämpfung abhängige Amplitudenüberhöhung.

Betrachtet man hingegen die um einen Dämpfungsterm erweiterte MATHIEUsche Differentialgleichung mit konstanter oder periodischer Störfunktion, stellt sich das Antwortverhalten wesentlich komplizierter dar. Detaillierte mathematische Herleitungen dazu findet man insbesondere in [63] und [73]. Im Hinblick auf das Problem der Rotorstillsetzung werden hier nur solche Störfunktion betrachtet, deren Frequenzen in ganzzahligem oder rationalem Verhältnis zur Frequenz der Parametererregung stehen. In diesem Fall genügt es, für die Gleichung

$$\ddot{x} + 2D\Omega\dot{x} + (K_0 + K_c \cos \Omega t)\Omega^2 x = u_q \Omega^2 \cos q\Omega t \quad (4.41)$$

als Lösung anzusetzen

$$x_{part} = \sum_r^{\infty} A_r \cos(r\Omega t + \varphi_r) . \quad (4.42)$$

In Bild 4.20 sind die Amplituden der in der Lösung auftretenden harmonischen Anteile zu verschiedenen Störfrequenzen dargestellt. Die Betrachtungen betreffen denselben Fall wie in Bild 4.4, also die (winkelhalbierende) Gerade $K_c = K_0$ durch die STRUTTSche Karte. Entlang der Abszisse wächst demnach nicht nur die konstante Systemsteifigkeit K_0 sondern simultan auch die Amplitude der Parametererregung K_c . Die Dämpfung ist mit $D = 0.15$ wieder so gewählt, daß das System trotz Parametererregung immer stabil bleibt. Die Amplitudenkurven wurden durch harmonische Analyse der numerisch integrierten Zeitverläufe ermittelt, und die Stabilitätsrechnungen erfolgten nach der klassischen FLOQUET-Theorie.

$$\ddot{x} + 2D\Omega\dot{x} + (K_0 + K_c \cos \Omega t)\Omega^2 x = u_g \Omega^2 \cos q\Omega t, \quad x_{part} = \sum_r A_r \cos(r\Omega t + \varphi_r)$$

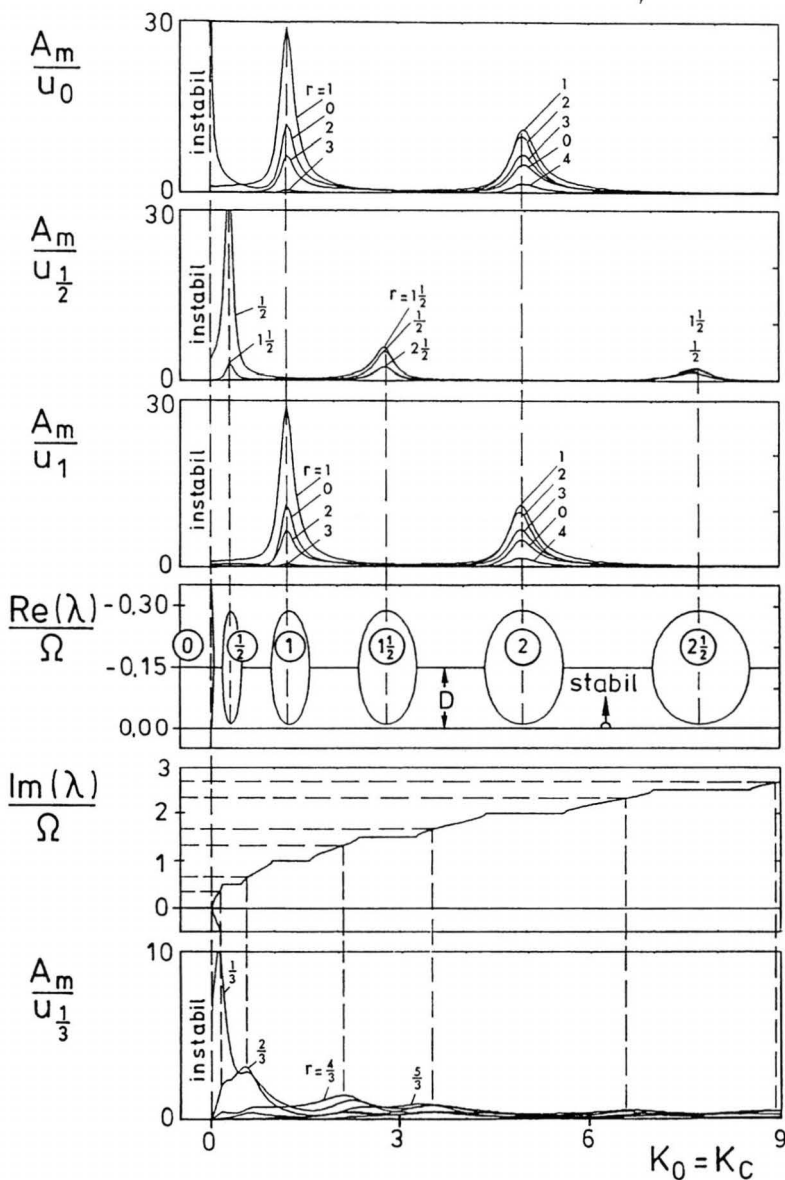


Bild 4.20 Amplitudenverläufe und Stabilität der MATHIEUschen Differentialgleichung mit konstanter oder periodischer Störfunktion

Die wichtigsten der auch in [63] und [64] beschriebenen Eigenschaften lassen sich unmittelbar aus dem Verlauf der Antwortamplituden ablesen:

- Hat die Störfunktion dieselbe Frequenz wie die Parametererregung oder ein ganzzahliges Vielfaches davon, d.h. gilt $q = n$, so enthält die Lösung alle Harmonischen von Ω einschließlich eines konstanten Anteils. Es treten starke Resonanzüberhöhungen jeweils im Bereich der ganzzahligen Parameterresonanzen auf (drittes Diagramm). Dieser Fall ist vergleichbar mit den Lösungen der Schlagdifferentialgleichung.
- Ähnliches gilt für eine konstante Störfunktion; die Lösung enthält auch in diesem Fall periodische Anteile, deren Amplituden bei Parameterresonanz stark anwachsen (oberstes Diagramm). Dies entspricht bei der Schlagbewegung der Anregung durch den Gewichtsterm F_0 .
- Hat die Störfunktion eine Frequenz, für die $q = n + 1/2$ gilt, enthält die Lösung harmonische Anteile, deren Frequenzen ungeraden ganzzahligen Vielfachen von $\Omega/2$ entsprechen. Die Amplitudenüberhöhungen treten nun in den unganzzahligen Parameterresonanzgebieten auf (zweites Diagramm).
- Wenn die Frequenz der Störfunktion keinem Vielfachen von $\Omega/2$ entspricht, enthält die Lösung sowohl Harmonische der Störfrequenz, als auch alle Harmonischen von Ω . Selbst in diesen Fällen ergeben sich - wenn auch schwächere - Amplitudenüberhöhungen und zwar dort, wo die Bedingung $\text{Im}(\lambda)/\Omega = n \pm q$ erfüllt ist (unterstes Diagramm).

Auf weitere Details wie z.B. den Einfluß der Phasenlage zwischen Parametererregung und Störfunktion oder die genaue Lage der Resonanzmaxima (etwas näher zu jeweils einer der beiden Parameterresonanz-Bereichsgrenzen) sei hier nicht weiter eingegangen. Wichtig bleibt festzuhalten, daß die Parametererregung nicht nur destabilisierend wirkt, sondern gleichzeitig unendlich viele Resonanzstellen erzeugt. Die Amplitudenüberhöhungen erreichen dabei z.T. beträchtliche Werte. So liegt im gewählten Beispiel die maximale Verstärkung im Bereich der 1Ω -Parameterresonanz bei $A_1(K=1.12) = 29.2 u_1$, während bei einem System mit konstanten Koeffizienten das Amplitudenmaximum im entsprechenden Fall nur $A(K=1) = 3.3 u$ erreicht.

4.4.2 Das stationäre Antwortverhalten der Schlagbewegung

Um die bei der Schlagbewegung auftretenden Amplituden der partikulären Lösung bezüglich ihrer Größenordnungen beurteilen zu können, sei zunächst die statische Ruhelage für den Fall ohne Luftkräfte betrachtet. Am Blatt wirken dann nur Zentrifugal-, Feder- und Gewichtskräfte, während alle dynamischen Anregungen wegfallen. Mit $\beta'' = \beta' = 0$ folgt aus der Schlagdifferentialgleichung

$$\beta_{stat} = \frac{F_0}{K_0} = \frac{-S^p g}{J^{CP} \Omega^2 + J^{PP} \Omega_{nenn}^2 \bar{\omega}_\beta^{nr2}} \quad (4.43)$$

In Bild 4.21 sind diese Auslenkungen über dem Fortschrittsgrad aufgetragen. Die Wahl von μ als Abszisse ist hierbei nicht weiter physikalisch motiviert, sondern erfolgt nur aus Gründen der Einheitlichkeit. Man erkennt, daß für den mehrfach betrachteten Referenzfall an der Stabilitätsgrenze ($\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.10$) das Durchhängen der nichtdrehenden Blätter ($\mu \rightarrow \infty$) mit $\beta = -8.7^\circ$ einen technisch kaum mehr akzeptablen Wert annimmt.

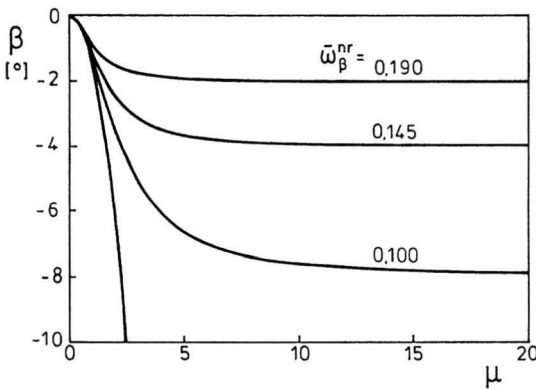


Bild 4.21 Statische Schlagwinkelauslenkung (Ruhelage) im Vakuum

Berechnet man nun die periodischen Lösungen für die Schlagdifferentialgleichung und trägt die Amplituden ihrer harmonischen Anteile über dem Fortschrittsgrad auf, ergeben sich ähnliche Verläufe wie im ersten und dritten Diagramm von Bild 4.20. Bei einer Anregung ausschließlich durch ganzzahlige Ω -Vielfache, wie im vorliegenden Fall, kann man für die partikuläre Lösung analog zu Gl. (4.42) ansetzen

$$\beta_{part} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\Omega t + \varphi_m) . \quad (4.44)$$

Für [Bild 4.22](#) und [Bild 4.23](#) wurden die ersten fünf Harmonischen und der Betrag des konstanten Anteils jeweils auf die Steuer- bzw. Eingangsgrößen in der Störfunktion bezogen (mit Ausnahme der Anregung durch das Blattgewicht). Der Blatteinstellwinkel ist entsprechend der konventionellen Steuerung von Hubschrauberrotoren in einen kollektiven und einen zyklischen Anteil aufgeteilt:

$$\vartheta_{st} = \vartheta_0 + \vartheta_c \cos \psi + \vartheta_s \sin \psi . \quad (4.45)$$

Wegen der Linearität der Differentialgleichung können die einzelnen Anteile der Störfunktion zunächst getrennt betrachtet und später superponiert werden. [Bild 4.22](#) betrifft noch einmal die Differentialgleichung ohne Berücksichtigung der Rückanströmung, da in diesem Fall die Zuordnung der Resonanzspitzen zu den Parameterresonanzgebieten besonders deutlich wird.

Bei einer Anschlußsteifigkeit von $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.20$ (linke Spalte) wachsen alle dargestellten harmonischen Anteile mit dem Fortschrittsgrad stark an und erreichen schon bei $\mu = 5$ technisch völlig unakzeptable Werte. Dabei nehmen die höheren Harmonischen noch deutlich schneller als die niederfrequenten Anteile zu. Interessant ist festzuhalten, daß oberhalb von ca. $\mu = 10$ die Parameterresonanzgebiete praktisch verschwunden (d.h. extrem schmal) sind und dennoch derart starke Amplitudenüberhöhungen auftreten. Vergrößert man die Ersatzfedersteifigkeit auf $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.22$ (mittlere Spalte), erreichen die Amplituden zwar immer noch erhebliche Werte, die Resonanzmaxima liegen bei größeren Fortschrittsgraden jedoch ungefähr auf einer Höhe. Erst mit $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.24$ (rechte Spalte) bleiben die Schlagwinkel in einer technisch noch beherrschbaren Größenordnung. Die Amplituden erreichen ihre Maximalwerte im Bereich von $\mu = 5$ und gehen danach auf gleichbleibend kleine Werte zurück. Der konstante und der 2Ω -Anteil liegen dann bei Werten in der Größenordnung von einem Grad, die höheren Harmonischen deutlich darunter.

Geht man zu dem realistischeren Modell mit Berücksichtigung der Rückanströmung über, zeigt sich, daß wie beim Stabilitätsproblem mit wesentlich kleineren Anschlußsteifigkeiten akzeptables Verhalten erreicht wird. In [Bild 4.23](#) sind die Amplituden logarithmisch aufgetragen, damit der Zusammenhang zwischen Resonanzen und Stabilität noch zu erkennen ist.

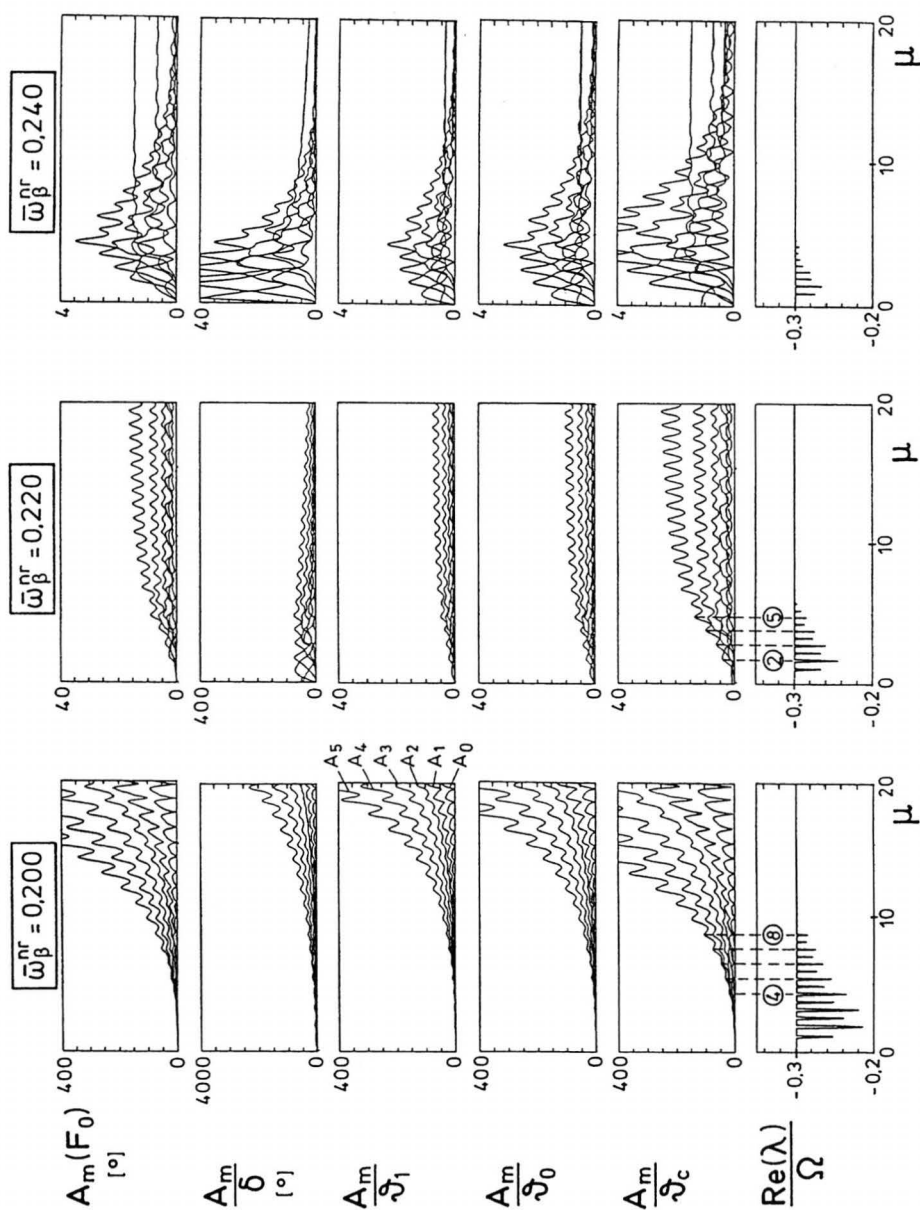


Bild 4.22 Amplitudenkurven für die 0. bis 5. Harmonische der partikulären Lösung der Schlagdifferentialgleichung ohne Berücksichtigung der Rückanströmung

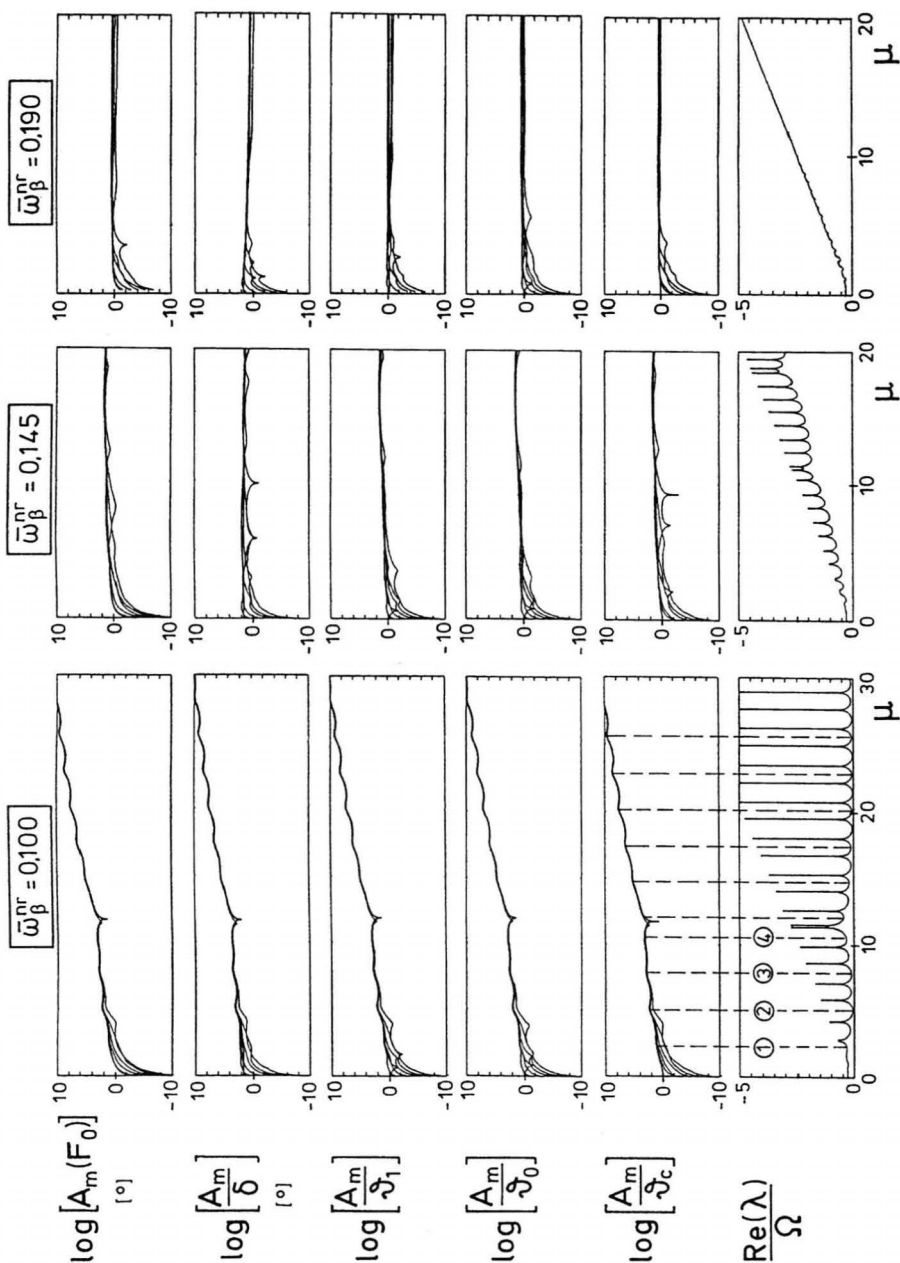


Bild 4.23 Amplitudenkurven für die 0. bis 5. Harmonische der partikulären Lösung der Schlagdifferentialgleichung bei Berücksichtigung der Rückanströmung

Die Rechnungen erfolgten in diesem Fall für Anschlußsteifigkeiten von $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0.100, 0.145$ und 0.190 . Erst mit dem größten Wert bleiben die Schlagamplituden innerhalb technisch sinnvoller Grenzen. Die Blattanschlußsteifigkeiten heute üblicher gelenkloser Hubschrauberrotoren liegen, wie erwähnt, in der Größenordnung von $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0.15$ und somit deutlich unter den für Stopp-Rotoren zu fordernden Werten.

Ein besonderes Phänomen zeigt sich nur bei den jeweils niedrigsten Anschlußsteifigkeiten und betrifft den konstanten Anteil. Wenn man in diesen Fällen das Vorzeichen von A_0 betrachtet (in den Diagrammen ist jeweils nur der Betrag dargestellt), stellt man fest, daß das Rotorblatt je nach Fortschrittsgrad Schwingungen nicht nur um negative sondern auch um positive Mittelwerte ausführt. Solche in [63] als Rüttelschwingungen bezeichneten Zustände treten hier dann auf, wenn die periodischen Störfunktionanteile größere positive konstante Anteile in der Lösung hervorrufen als das Blattgewicht negative.

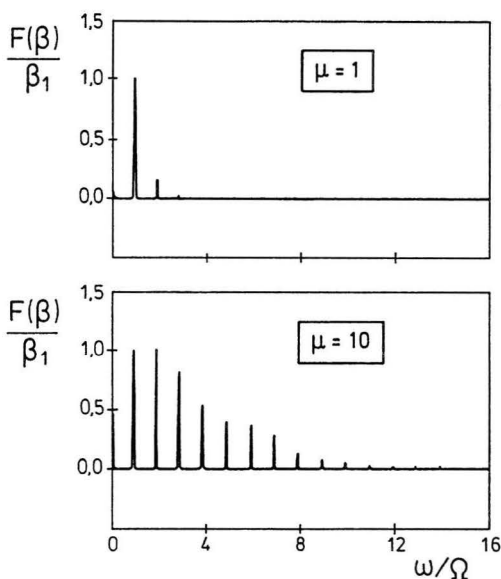


Bild 4.24 Amplitudenspektren der partikulären Lösung der Schlagdifferentialgleichung für $\vartheta_1 = -0.2$ rad, $\vartheta_0 = 9.2^\circ$, $\vartheta_c = \vartheta_s = 1^\circ$ und $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0.10$

Die in [Bild 4.22](#) und [Bild 4.23](#) dargestellten ersten fünf Harmonischen reichen bei hohen Fortschrittsgraden keinesfalls zur vollständigen Beschreibung der partikulären Lösung aus. [Bild 4.24](#) zeigt zwei Beispiele für Amplitudenspektren bei Berücksichtigung der

Rückanströmung, berechnet durch FOURIER-Transformation der durch numerische Integration ermittelten Zeitverläufe. Als Anregung wurde auf der rechten Seite außer dem Blattgewicht noch angesetzt: $\vartheta_1 = -0.2$ rad, $\vartheta_0 = 9.2^\circ$, $\vartheta_c = \vartheta_s = 1^\circ$; die Anschlußsteifigkeit beträgt $\bar{\omega}_\beta^{\text{sr}} = 0.10$. Während in der periodischen Lösung für $\mu = 1$ die Amplitude der dritten Harmonischen nur noch 1.7% bezogen auf die Amplitude der Grundschiwingung erreicht, liegt bei $\mu = 10$ selbst der 11Ω -Anteil noch bei 2.0%. Hier wird besonders deutlich, welchen Aufwand es bedeuten würde, einen entsprechend vielgliedrigen Ansatz in die Schlagdifferentialgleichung einzusetzen und durch FOURIER-Abgleich anzupassen.

4.4.3 Einfluß der partikulären Lösung auf die Stabilität

Nachdem die periodischen Lösungen bekannt sind, kann untersucht werden, welchen Einfluß sie im nichtlinearen Fall auf die Stabilität ausüben. Verglichen wird im folgenden die Stabilität der trivialen Lösung (homogene Schlagdifferentialgleichung) mit derjenigen der periodischen Lösungen (inhomogene Gleichung) für das Aerodynamikmodell nach Kap. 2.5.3. Die Anschlußsteifigkeit wurde bei diesen Betrachtungen mit $\bar{\omega}_\beta^{\text{sr}} = 0.12$ bewußt niedrig angesetzt, damit schon bei kleinen Fortschrittsgraden große Antwortamplituden auftreten, so daß die Nichtlinearitäten im aerodynamischen Modell wirksam werden.

Bild 4.25 beschreibt das Stabilitätsverhalten der periodischen Lösungen, die sich in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad für eine bestimmte Beispielstörfunktion ergeben. Angesetzt wurden in diesem Fall auf der rechten Seite der Term F_0 für das Blattgewicht, eine Verwindung von $\vartheta_1 = -0.2$ rad und ein Kollektivwinkel von $\vartheta_0 = 9.2^\circ$; letzterer gleicht gerade den negativen Rotorschub infolge der Verwindung aus.

Ab ca. $\mu = 1.5$ ergeben sich teilweise große Abweichungen gegenüber den Eigenwerten der homogenen Differentialgleichung. Bis $\mu = 5$ sind die partikulären Lösungen schwächer stabil als der triviale Betriebszustand $x_{\text{part}} = 0$, im mittleren Bereich kehren sich die Verhältnisse um, doch oberhalb von $\mu = 8$ ändern sich die Eigenschaften der periodischen Lösungen noch deutlicher. Während im homogenen Fall die Lösungen für alle Fortschrittsgrade stabil bleiben, geht für die inhomogene Gleichung ab ca. $\mu = 9$ die Stabilität verloren.

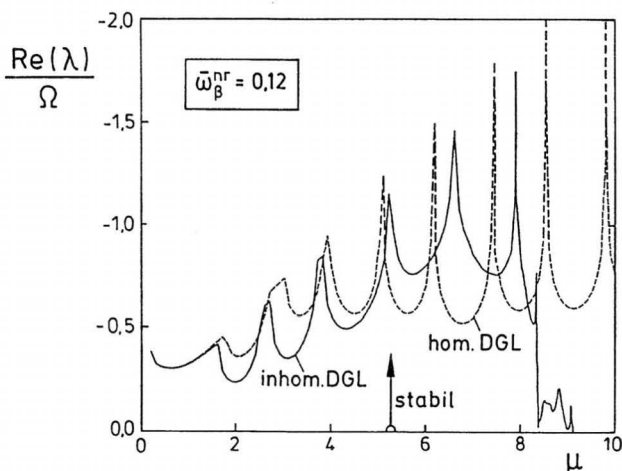


Bild 4.25 Vergleich der Stabilität von trivialer Lösung der homogenen Gleichung und periodischer Lösung der inhomogenen Gleichung für das nichtlineare Aerodynamikmodell (rechte Seite: F_0 , $\vartheta_1 = -0.2$ rad, $\vartheta_0 = 9.2^\circ$)

Aufschluß über dieses Verhalten gibt eine genauere Betrachtung der periodischen Lösungen. Unterhalb von $\mu = 8$ bleiben die Maximalwerte des Schlagwinkels zwar noch hinreichend klein, durch den großen Anteil an höheren Harmonischen entstehen auf kleinen Abschnitten des Rotorumlafs jedoch sehr große Schlagwinkelgeschwindigkeiten, die Anstellwinkel jenseits der Abreißgrenze induzieren. Ab $\mu = 8$ wachsen die Schlagamplituden dann sehr schnell auf unrealistisch hohe Werte. Gleichzeitig treten, zunächst allerdings mit sehr kleiner Amplitude, subharmonische Anteile der Frequenz $\Omega/2$ in der Lösung auf. Der Amplitudenanstieg ist hier erheblich steiler als in einem vergleichbaren Fall mit linearer Aerodynamik. Mit derart großen Amplituden und den dadurch bedingten hohen Schlaggeschwindigkeiten liegt aber praktisch während des gesamten Umlaufs abgerissene Strömung vor. Daß jenseits des linearen $dC_a/d\alpha$ -Bereichs die örtlichen Auftriebskomponenten die Schlagbewegung sogar anfachen können, läßt sich aus Gl. (2.28) für die senkrechte Anströmkomponente, Gl. (2.42) für den effektiven Anstellwinkel und Bild A.7 (siehe Anhang A.9) schließen. So führen bei $C_{an} < 0$ negative Schlaggeschwindigkeiten (bzw. die dadurch induzierten Zusatzanstellwinkel) zur Verringerung der Luftkraftschlagmomente, womit die Bewegung zusätzlich beschleunigt wird. Zu den dabei möglichen Grenzschnitten siehe auch Kap. 5.1.7.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß der unregelmäßige Realteilverlauf in der Nähe der Stabilitätsgrenze nicht auf numerische Probleme beim modifizierten FLOQUET-Verfahren zurückzuführen ist, sondern sich für einen weiten Bereich der Verfahrensparameter reproduzieren läßt. Andererseits treten in Verbindung mit den großen Schlagwinkelgeschwindigkeiten sehr schnelle Anstellwinkeländerungen auf, womit in bestimmten Abschnitten des Rotorumlafs schon so große reduzierte Frequenzen (bzw. STROUHAL-Zahlen) vorliegen, daß instationäre aerodynamische Effekte nicht mehr ohne genauere Untersuchungen zu vernachlässigen sind (vgl. [51]). Die hier dargestellten Ergebnisse können also nur als Hinweise für das Auftreten bestimmter Effekte dienen. Bei kleineren, technisch akzeptablen Schlagamplituden sind die verwendeten Vereinfachungen dagegen weniger kritisch.

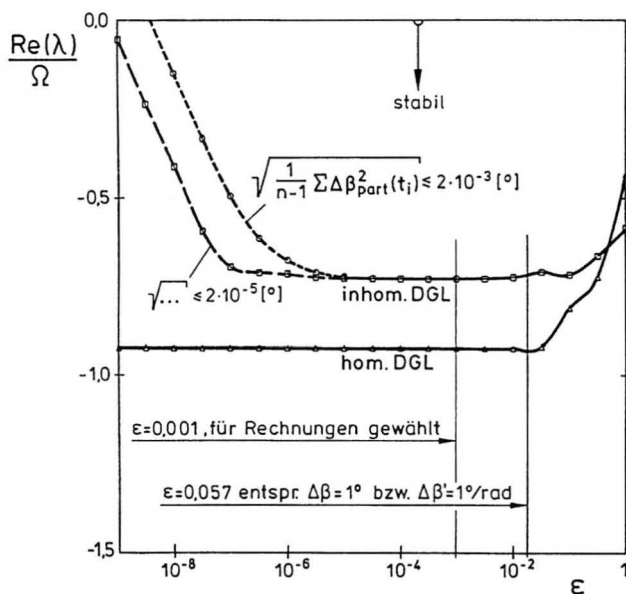


Bild 4.26 Numerische Eigenschaften der Rechnungen zur Schlagstabilität bei homogener und inhomogener Differentialgleichung ($\mu = 5$, $\bar{\omega}_\beta''' = 0.12$)

Für den Fortschrittsgrad $\mu = 5$ beschreibt Bild 4.26 das numerische Verhalten der Rechnungen zu Bild 4.25. Bei Untersuchung der homogenen Differentialgleichung ist die Wahl der Störungsgröße ε demnach völlig unkritisch. Aber auch im inhomogenen Fall ergibt sich selbst bei einem mittleren Fehler von $\Delta\beta = 0.002^\circ$ in der partikulären Lösung noch ein

nutzbarer Bereich von $0.00003 < \varepsilon < 0.01$. Für die Rechnungen in [Bild 4.25](#) konnten die Störungen daher einheitlich zu $\varepsilon = 0.001$ gewählt werden und mußten nicht gesondert für die beiden Zustandsgrößen angepaßt werden. Die Anzahl der Integrationsstützstellen pro Erregerperiode betrug 360. Bei der inhomogenen Gleichung mußte die Integration der Monodromiematrix wegen der subharmonischen Anteile in der partikulären Lösung über jeweils zwei Erregerperioden erfolgen.

Die Auswirkungen von zyklischen Steuereingaben, wie sie ggf. zum Aussteuern der Rotormomente erforderlich werden könnten, zeigt [Bild 4.27](#). In diesem Fall wurde, bei sonst gleichen Daten, auf der rechten Seite nur der ϑ_{st} -Term berücksichtigt und kontinuierlich die ϑ_s -Komponente nach Gl. (4.45) vergrößert. Es wird deutlich, daß in diesem speziellen Fall für die üblichen Steueramplituden keine Instabilitäten auftreten. Man erkennt ferner, wie der Betriebspunkt mit wachsender Steuereingabe von einem in ein benachbartes Parameterresonanzgebiet verschoben wird.

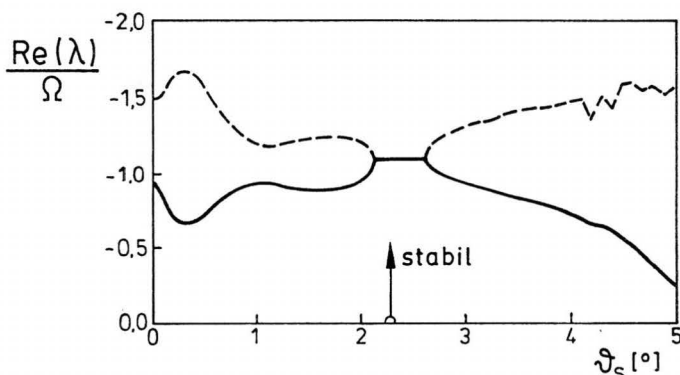


Bild 4.27 Einfluß des zyklischen \sin -Steuerwinkels auf die Schlagstabilität für das nichtlineare Aerodynamikmodell ($\mu = 5$, $\bar{\omega}_{\beta}^{nr} = 0.12$)

Noch gravierender ist der Einfluß der partikulären Lösung auf die Stabilität natürlich bei sehr kleinen Anschlußsteifigkeiten. Die Auswirkungen des Gewichtsterms auf die aus [Bild 4.18](#) bekannte Stabilitätskarte zeigt [Bild 4.28](#). Dargestellt sind hier allerdings Höhenlinien mit $\text{Re}(\lambda)/\Omega = -0.1$ und nicht die Stabilitätsgrenzen selbst.

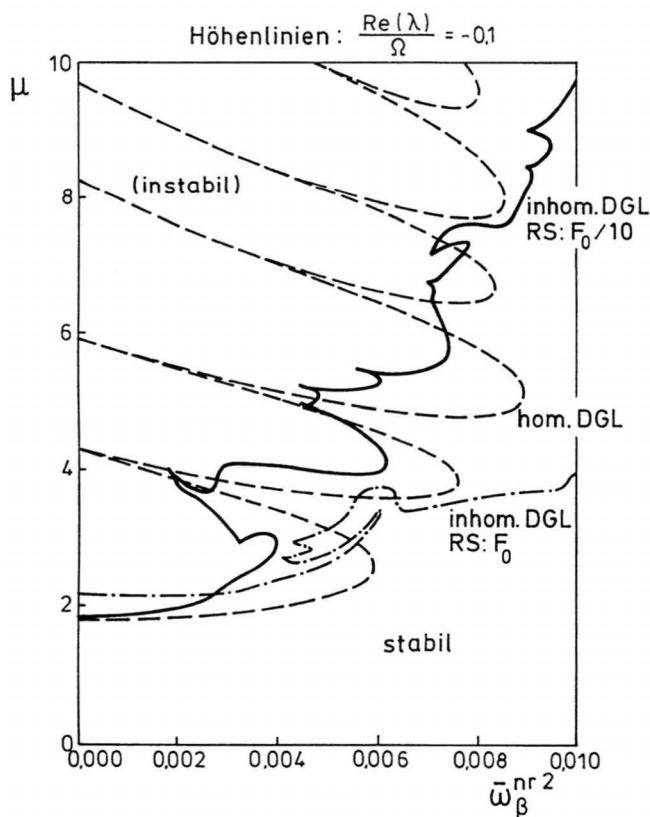


Bild 4.28 Stabilitätskarte zum Einfluß des Blattgewichtes auf die Schlagbewegung für das nichtlineare Aerodynamikmodell (Höhenlinien $\text{Re}(\lambda)/\Omega = -0.1$)

Selbst wenn nur ein Zehntel der Erdbeschleunigung angesetzt wird, ergibt sich ein völlig abweichender Verlauf der Höhenlinien; es scheinen zusätzliche, kleinere Parameterresonanzgebiete aufzutreten. Das Stabilitätsverhalten ist bis ca. $\mu = 8$ zwar etwas günstiger, Anschlußsteifigkeiten von $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.1$ können jedoch für größere Fortschrittsgrade Stabilität nicht mehr gewährleisten. Bei vollem Gewichtseinfluß deutet der flache Verlauf der Höhenlinie auf noch wesentlich höhere erforderliche Anschlußsteifigkeiten.

4.5 Untersuchungen bei variabler Rotordrehzahl

Die Untersuchungen zum Stabilitäts- und zum Antwortverhalten werden nun noch durch Simulationen für den Fall sich ändernder Rotordrehzahlen ergänzt. Bei den bis hierher betrachteten Rechnungen wurden bestimmte stationäre Betriebszustände auf ihre Eigenschaften untersucht. Dabei konnten sich die Schlagamplituden ungehindert bis zum Erreichen ihrer stationären Werte ausbilden. Es liegt jedoch in der Natur parametererregter Systeme, daß unmittelbar neben Bereichen mit starken Parameterresonanzen und großen Amplituden immer auch solche mit stabilen Lösungen bzw. kleinen Amplituden auftreten. Es ist daher nicht anzunehmen, daß beim Durchlaufen der entsprechenden Parameterebene allein die jeweils kritischen Zustände für das Stillsetzungsverhalten verantwortlich sind.

Wie sich aus den Ergebnissen von Kap. 2.2 ergibt, haben die Luftkräfte insbesondere bei den hier interessierenden schnellen Abbrems- und Anfahrvorgängen nur wenig Einfluß auf den Drehzahlverlauf. Wie Bild 2.1 zeigt, kann man gerade für den Bereich hoher Fortschrittsgrade in guter Näherung von linearen Verläufen ausgehen. Statt die Drehzahl- und Schlagdifferentialgleichung simultan zu lösen, wird der Drehzahlverlauf im folgenden entsprechend einer konstanten Drehzahländerung vorgegeben. Außerdem werden keine zusätzlichen Ω -Terme in die Schlagdifferentialgleichung eingearbeitet. Rechnungen mit dem voll nichtlinearen Blattmodell nach Kap. 5.3 haben eindeutig gezeigt, daß Einflüsse der Drehzahldynamik über Massenkkräfte für realistische Drehbeschleunigungen nur im Schwenkfreiheitsgrad nachzuweisen sind; im Fall der Schlagbewegung sind die Auswirkungen der sich zeitlich ändernden Luftkraftkoeffizienten um ein Vielfaches größer.

Bild 4.29 zeigt den theoretischen Grenzfall eines gelenkigen Blattanschlusses mit $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0$ (entsprechend einem Blattanschluß mit idealem mechanischem Gelenk, welches keinerlei Momente überträgt). Die Drehzahländerungen erfolgen mit $\dot{\Omega} = \pm 0.85 \text{ rad/s}^2 = \text{const.}$ (oberste Reihe), womit der kritische, im quasistationären Fall instabile Fortschrittsgradbereich in nur 5 s durchlaufen wird (zweite Reihe). Die dritte Reihe zeigt die Stabilität der homogenen Schlagdifferentialgleichung anhand der Reaktionen auf eine Anfangsstörung. Zwar bleiben die Schlagwinkel sowohl bei der Stillsetzung (links) als auch beim Wiederanfahren (rechts) beschränkt, sie erreichen jedoch Maximalwerte bis zum 30-fachen der angesetzten Störung. Die Antwortamplituden infolge der Störfunktionsterme mit F_0 und ϑ_1 haben ähnliche Verläufe, erreichen jedoch völlig unrealistische Werte von mehreren tausend Grad (vierte und unterste Reihe).

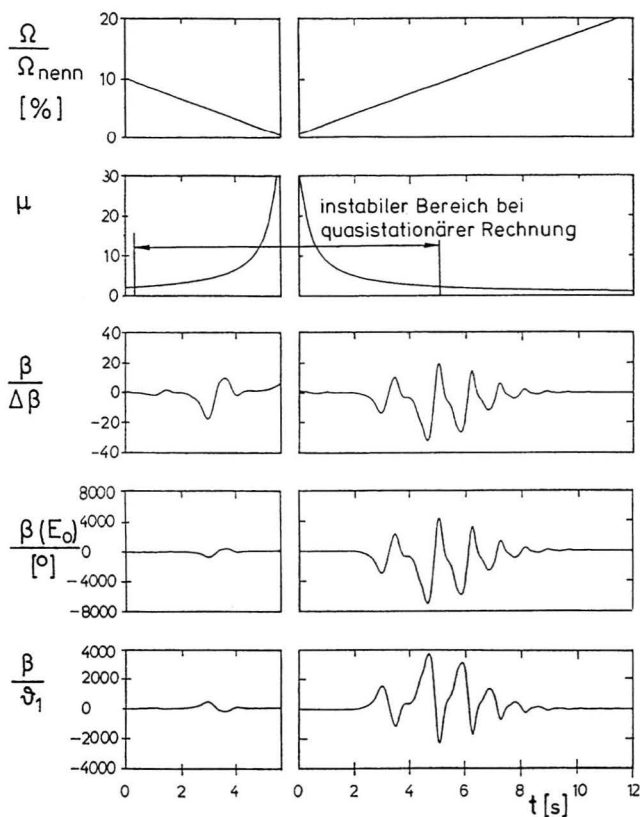


Bild 4.29 Simulierte Schlagwinkelverläufe für die homogene und die inhomogene Differentialgleichung ($\bar{\omega}_{\beta}^{nr} = 0$)

Wird die Anschlußsteifigkeit auf $\bar{\omega}_{\beta}^{nr} = 0.145$ erhöht, siehe Bild 4.30, stellt die Stabilität kein Problem mehr dar, und die Antwortamplituden infolge des Blattgewichts bleiben unter ca. 10° bei der Stillsetzung bzw. unter ca. 20° beim Beschleunigen. Im quasistationären Fall erreichten die Schlagwinkel bei der selben Blattauslegung dagegen noch Werte um 100° . Technisch akzeptabel sind diese Werte zwar nicht, insbesondere wenn man bedenkt, daß für den Schwebeflug optimierte Verwindungen in der Größenordnung von $\vartheta_1 = -10^\circ$ liegen. Die Rechnungen zeigen aber, daß schnelle Drehzahländerungen die auftretenden Schlagwinkel deutlich reduzieren können.

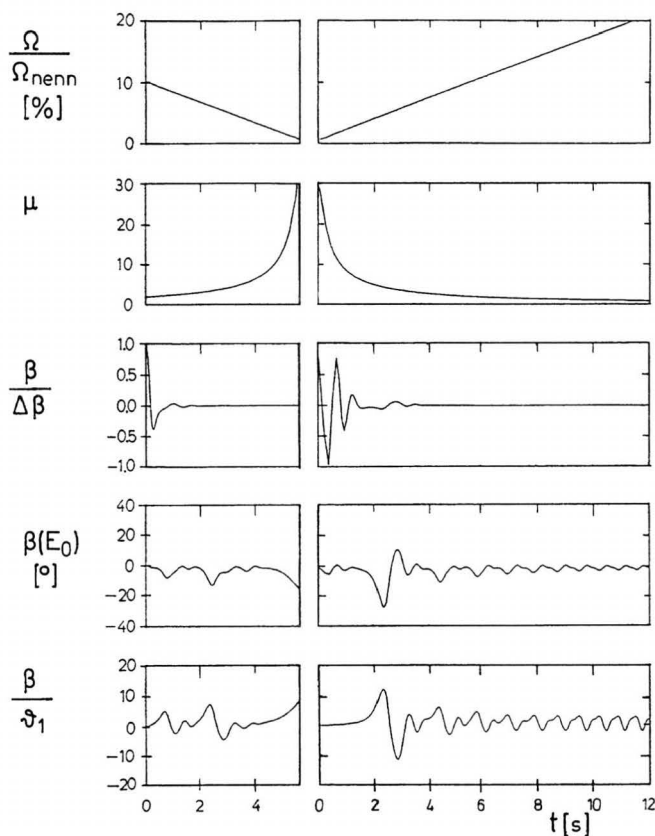


Bild 4.30 Simulierte Schlagwinkelverläufe für die homogene und die inhomogene Differentialgleichung ($\tilde{\omega}_{\beta}^{\text{er}} = 0.145$)

Die Resultate einer größeren Anzahl weiterer Simulationen sind in den Bildern 4.31 und 4.32 zusammengefasst. Dazu wurden die während der Anfahrvorgänge jeweils aufgetretenen maximalen Schlagwinkel über der Rotordrehbeschleunigung aufgetragen. Als Anhaltspunkt für die technische Realisierbarkeit der Drehzahlverläufe ist zusätzlich noch das jeweils erforderliche Anfahr Drehmoment (bezogen auf das maximal verfügbare Triebwerksdrehmoment bei Nenndrehzahl) angegeben.

Bild 4.31 betrifft zunächst die Stabilität der homogenen Gleichung. Die sich ergebenden Zeitverläufe fallen z.T. sehr unterschiedlich aus, je nachdem zu welchem Zeitpunkt bezogen auf die Erregerperiode die Anfangsstörung wirksam wird. Aus den Simulationen

ergeben sich daher über $\dot{\Omega}$ stark schwankende Maximalwerte (durchgezogene Kurven im Bild). Eingezeichnet sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die Einhüllenden dieser Verläufe (gestrichelte Kurven). Man erkennt, daß bei hinreichend schnellen Drehzahländerungen auch Blätter mit sehr geringer Steifigkeit gegenüber Störungen unempfindlich werden.

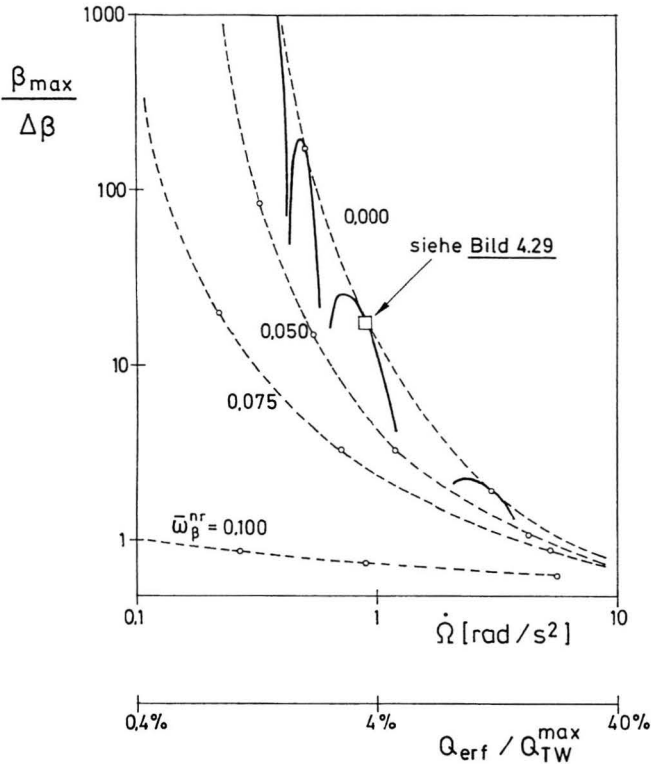


Bild 4.31 Maximale Schlagwinkel infolge einer Anfangsstörung während des Wiederanfahrens (homogene Differentialgleichung)

Für das Antwortverhalten, in Bild 4.32 wieder am Beispiel einer Anregung durch den ϑ_1 -Term dargestellt, verlaufen die Kurven dagegen streng monoton fallend. Für die untersuchten Anschlußsteifigkeiten ergibt sich zwar eine ähnliche Tendenz, aber bei den technisch erforderlichen Steifigkeiten in der Größenordnung von $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.2$ verlaufen die Kurven so flach, daß der positive Einfluß großer Winkelbeschleunigungen nur noch klein ist.

Unabhängig davon ist, wie schon angedeutet, in Hinblick auf die Betriebssicherheit natürlich eine Blattausslegung vorzuziehen, bei der die Schlagwinkel für alle kritischen Rotordrehzahlen auch stationär hinreichend klein bleiben.

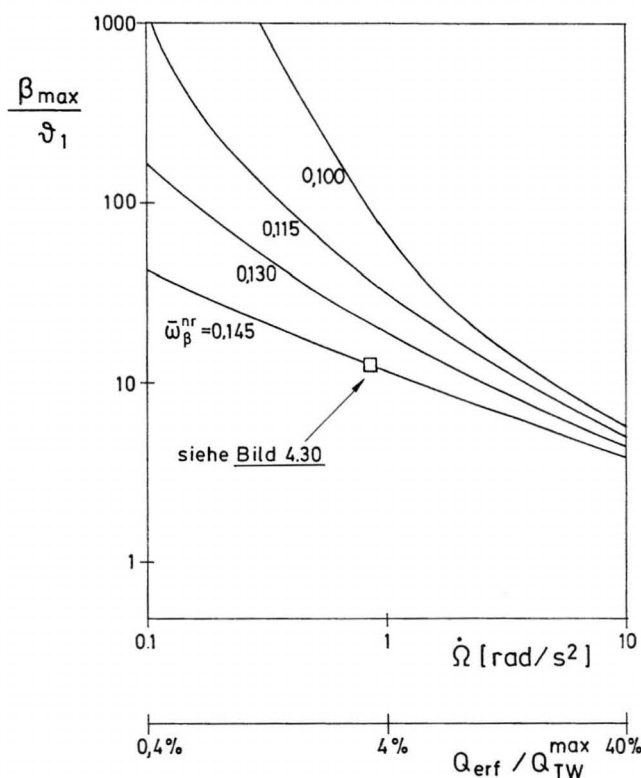


Bild 4.32 Maximale Schlagwinkel infolge der Blattverwindung (als einzigem Term der Störfunktion) während des Wiederauffahrens

5 Die Berücksichtigung weiterer Blattfreiheitsgrade

Neben der Schlagbewegung sind i.a. auch die Blattfreiheitsgrade Torsion und Schwenken für die Rotordynamik oder die Eigenschaften des gesamten Fluggerätes von erheblicher Bedeutung. Die Torsion des Blattes erzeugt über die Beeinflussung der örtlichen Anstellwinkel direkt zusätzliche Luftkräfte und wirkt damit auf alle Blattbewegungen. Durch eine geschickte Auslegung der Rotorblätter in Bezug auf die Anordnung von Luftangriffspunkt, elastischer Achse und Schwerpunkt im Profilschnitt, lassen sich negative Auswirkungen auf das dynamische Verhalten weitgehend vermeiden. Probleme können sich jedoch an den Grenzen des Flugbereichs in Form von Divergenz, Abreißflattern oder Flattern bei hohen MACH-Zahlen ergeben; ein Überblick über derartige Phänomene findet sich in [34].

Die Schwenkbewegung, angeregt durch wechselnde Widerstands- und Corioliskräfte, hat selbst nur wenig Einfluß auf die Blattluftkräfte. Die entscheidenden Fragestellungen ergeben sich hier vielmehr aus dem Zusammenwirken aller Blätter. In Abhängigkeit von Frequenz und Phasenlage der individuellen Blattbewegungen kann sich eine Exzentrizität des gemeinsamen Blattschwerpunktes bezüglich der Rotorachse ausbilden, die zu Wechselwirkungen mit den Zellenbewegungen führt. Dabei treten ggf. selbsterregte Schwingungen auf, die unter den Begriffen Boden- bzw. Luftresonanz zusammengefaßt werden. Detaillierte Untersuchungen zu diesem Problem liegen z.B. in [36], [55], [58] und [97] vor.

Von den diversen Arbeiten zur Stabilität der gekoppelten Bewegungen seien hier nur [85] bis [87] genannt. Auch diese Untersuchungen beschränken sich jedoch auf die bei Hubschraubern üblichen Betriebsbedingungen mit belastetem Rotor bei kleinen Fortschrittsgraden.

5.1 Die Torsionsbewegung

Der für die Torsionsmomente relevante Hebelarm der Blattluftkräfte läßt sich für die meisten Untersuchungen durch einen festen Abstand zwischen Luftangriffspunkt und elastischer Achse bzw. der Achse des Ersatzgelenks beschreiben, da im Bereich kleiner Anstellwinkel die Lage des Luftangriffspunktes im Profilschnitt praktisch konstant ist. Erst bei abgerissener Strömung werden die Verhältnisse komplizierter und es müssen zusätzliche Luftkraftmomente berücksichtigt werden.

Nach den einfachsten Ansätzen der Profiltheorie liegt der Angriffspunkt der Luftkräfte bei $1/4$ der Profiltiefe l_{Bl} , ausgehend von der angeströmten (Vorder-)Kante. Es folgt sofort, daß beim Auftreten von Rückanströmung ein zweiter Luftangriffspunkt zu berücksichtigen ist: neben dem $l_{Bl}/4$ - noch der $3l_{Bl}/4$ -Punkt (bei $y = y_{L1}$ bzw. $y = y_{L2}$). Damit wird auch die besondere Bedeutung der Torsion für die Stillsetzungsuntersuchungen deutlich. Während bei einer üblichen Blattauslegung die elastische Achse in der Nähe der $l_{Bl}/4$ -Linie liegt, die Torsionsmomente also vergleichsweise klein bleiben, ergeben sich bei Rückanströmung entsprechend große Hebelarme. Selbst wenn der Momentenverlauf über dem Anstellwinkel also nicht im einzelnen nachgebildet werden soll, ist das aerodynamische Modell zumindest so zu erweitern, daß das Umspringen des Luftangriffspunktes beim Übergang von normaler zu rückwärtiger Anströmung richtig erfaßt wird.

Bei der Schlagbewegung ergaben sich dämpfende Luftkräfte schon bei quasistationärer Betrachtungsweise allein aus den durch die Bewegung induzierten zusätzlichen Anstellwinkeln. Sollen hingegen auch für den Torsionsfreiheitsgrad Dämpfungskräfte modelliert werden, muß auf Ansätze der instationären Aerodynamik zurückgegriffen werden, nach denen sich Momente in Abhängigkeit von Anstellwinkeländerungen ergeben. Im folgenden wird zunächst auf die erforderlichen Erweiterungen des aerodynamischen Modells eingegangen und anschließend anhand von Beispielrechnungen der Einfluß der Torsion auf die Stabilität beim Stillsetzen untersucht.

5.1.1 Erweiterung des aerodynamischen Modells um Torsions-Luftkraftmomente

Der erste Anteil (I) zum Luftkraftmoment ergibt sich aus dem örtlichen Auftrieb und dem aktuellen Abstand zwischen Luftangriffspunkt L und der Achse des Torsionsdrehgelenks E (welche in Anlehnung an die Kontinuumsmechanik hier auch als *elastische Achse* bezeichnet wird). Geometrie, Massenverteilung und aerodynamische Eigenschaften der Profilschnitte seien konstant entlang des Blattradius. Man erhält für das Torsionsmoment mit den üblichen vereinfachenden Annahmen analog zum Schlagmoment (Kap. 2.5.1) den Ausdruck

$$L_1^{Luft} = -\frac{\rho}{2} C_{\alpha\alpha} l_{Bl}^2 R \int_A^B \alpha_{eff} v_t^2 \left(\frac{y_L}{l_{Bl}} \right) dx \quad (5.1)$$

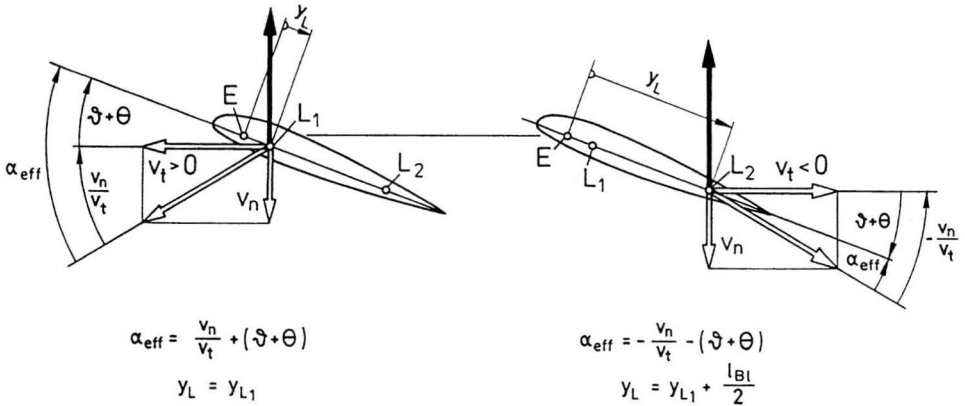


Bild 5.1 Anströmbedingungen am Blattelement

Betrachtet man die Anströmbedingungen am Profilschnitt, Bild 5.1, wird deutlich, daß zur Berücksichtigung der Rückanströmung nicht nur das Vorzeichen des effektiven Anstellwinkels in Abhängigkeit von v_t "umgeschaltet" sondern wie schon angedeutet auch der wirk-same Hebelarm y_L jeweils entsprechend angepaßt werden muß. Dies gelingt ähnlich wie beim Anstellwinkel durch Einführen eines Betragsterms in die Definition für den Hebelarm:

$$\left(\frac{y_L}{l_{Bl}} \right) = \bar{y} - \frac{1}{4} \frac{|v_t|}{v_t} \quad (5.2)$$

$$\text{mit} \quad \bar{y} = \left[\frac{y_{L1}}{l_{Bl}} \right] + \frac{1}{4} . \quad (5.3)$$

Der in die Gleichung für den effektiven Anstellwinkel Gl. (2.38) einfließende *Einstell*winkel muß bei Berücksichtigung des Torsionsfreiheitsgrades gegenüber Gl. (2.29) erweitert werden zu

$$\vartheta^* = \vartheta_{St} + \vartheta_1 x + \theta . \quad (5.4)$$

Unter Verwendung der konstanten und periodischen Blattintegrale Gl. (2.34) bzw. Gl. (2.39) sowie der Abkürzung

$$G_n(\psi) = 4\bar{y}D_n^R - D_n \quad (5.5)$$

kann man die Integration über das Blatt wieder formal durchführen und erhält schließlich mit den Gleichungen (2.27), (2.28) und (2.38) für diesen Teil des Luftkraftmoments

$$L_1^{Lift} = -\frac{\rho}{8} C_{aa} I_{Bl}^2 R^3 \Omega^2 \left\{ - \left[(G_3 - \frac{a}{R} G_2) - C_2^R \mu \sin \psi \right] \dot{\beta} / \Omega \right. \\
- \left[G_2 \mu \cos \psi - D_1 \mu^2 \cos \psi \sin \psi \right] \beta \\
+ \left[G_3 + (G_2 - D_2) \mu \sin \psi - D_1 \mu^2 \sin^2 \psi \right] (\Theta + \vartheta_{St}) \quad (5.6) \\
+ \left[G_4 + (G_3 - D_3) \mu \sin \psi - D_2 \mu^2 \sin^2 \psi \right] \vartheta_1 \\
+ \left[G_2 - D_1 \mu \sin \psi \right] \delta \left. \right\}$$

Ein weiterer Momentenanteil (II) ergibt sich, wie angedeutet, aus der Nickbewegung des Profilschnitts um die elastische Achse. Zu derartigen instationären aerodynamischen Effekten gibt es verschiedene z.T. sehr aufwendigen Theorien, siehe [51]. Insbesondere die von den vorauslaufenden Blättern induzierten Abwindschwankungen gestalten die Modellierung der instationären Kräfte beim Hubschrauber noch wesentlich aufwendiger als bei Flächenflugzeugen.

Für die prinzipiellen Untersuchungen in dieser Arbeit wird ein einfacher Ansatz nach der sogenannten Traglinientheorie verwendet. Danach ergeben sich am Blattelement linear von der Anstellwinkeländerung abhängige Torsionsmomente. Um die Gleichungen weiter analytisch behandeln zu können, werden von der zeitlichen Ableitung des Anstellwinkels

$$\dot{\alpha}_{eff} = \frac{\dot{v}_n v_t - v_n \dot{v}_t}{v_t^2} + \dot{\Theta} + \dot{\vartheta}_{St} \quad (5.7)$$

wie z.B. auch in [92] in einem entsprechenden Fall nur die Terme infolge der Profildrehung berücksichtigt. Geht man von dem Ansatz in [37] aus, erhält man in der hier verwendeten Nomenklatur

$$dL_{II}^{Lift} = -\frac{\rho}{8} C_{aa} I_{Bl}^3 R v_t \left[\bar{y} + \frac{1}{4} \right] \left[4C \left[\bar{y} - \frac{1}{4} \right] + 1 \right] \left[\dot{\Theta} + \dot{\vartheta}_{St} \right] dx \quad (5.8)$$

Analoge Formulierungen finden sich in [38] und [51], wobei dort für C_{aa} jeweils die Näherung 2π verwendet wird. Der i.a. komplexe Faktor C beschreibt die Phasenlage zwischen der (harmonischen oszillierenden) Nickbewegung und dem resultierenden Moment; er ist abhängig von der reduzierten Frequenz (STROUHAL-Zahl) $\frac{\omega_{Bl}}{2V}$ und wird meistens durch

die THEODORSEN- oder die LOEWY-Funktion angenähert. Für Hubschrauberrotoren im Vorwärtsflug wird in [37] die reelle Näherung

$$C = \frac{1}{1 + \frac{z_{Bl}^2}{4R\mu}} \quad (5.9)$$

angegeben, die für große μ in $C = 1$ übergeht. Damit vereinfacht sich Gl. (5.8) zu

$$dL_{II}^{Luft} = -\frac{\rho}{8} C_{\alpha\alpha} l_{Bl}^3 R H v_t \left[\Theta + \vartheta_{St} \right] dx \quad (5.10)$$

$$\text{mit } H = 4\bar{y}^2 + \bar{y} \quad , \quad (5.11)$$

worin H die Abhängigkeit der Nickdämpfung von der Lage der Drehachse beschreibt. Auch hier muß die Rückanströmung besonders berücksichtigt werden. Zum einen ändert v_t in Gl. (5.10) bei Anströmung von hinten das Vorzeichen, obwohl das Moment in Bezug auf die Drehbewegung immer in die gleiche Richtung wirkt; zum anderen muß die Lage der Drehachse wieder relativ zur angeströmten Profilkante beschrieben werden. Dazu wird statt Gl. (5.11) die Beziehung

$$H v_t = 4\bar{y}^2 |v_t| + \bar{y} v_t \quad (5.12)$$

in das Luftkraftmoment Gl. (5.10) eingearbeitet. Bild 5.2 zeigt die Funktion H nach Gl. (5.11) und jenen Verlauf, wie er bei Rückanströmung anzusetzen ist. Nach dieser vereinfachten Theorie entstehen bei normaler Anströmung genau dann keine drehgeschwindigkeitsabhängigen Luftkraftmomente, wenn sich das Profil um die Punkte $y = y_{L1} + l_{Bl}/4$ oder $y = y_{L2}$ bewegt. Liegt der Drehpunkt zwischen diesen Punkten ergeben sich schwach anfachende Momente, während die Luftkräfte für alle übrigen Drehpunktlagen dämpfend wirken.

Damit kann auch das Torsionsmoment Gl. (5.10) mittels der Blattintegrale Gl. (2.34) und Gl. (2.39) entlang des Radius formal integriert werden. Man erhält den Ausdruck

$$L_{II}^{Luft} = -\frac{\rho}{8} C_{\alpha\alpha} l_{Bl}^3 R^2 \Omega \left[4\bar{y}^2 D_2^R + \bar{y} (D_2 + D_1 \mu \sin \psi) \right] \left[\Theta + \vartheta_{St} \right] \quad (5.13)$$

Analog zu diesem Luftkraftmoment (II) ließe sich auch eine instationäre Auftriebskraft formulieren, die im Vergleich zu den quasistationär erfaßten Anteilen jedoch vernachlässigbar klein bleibt.

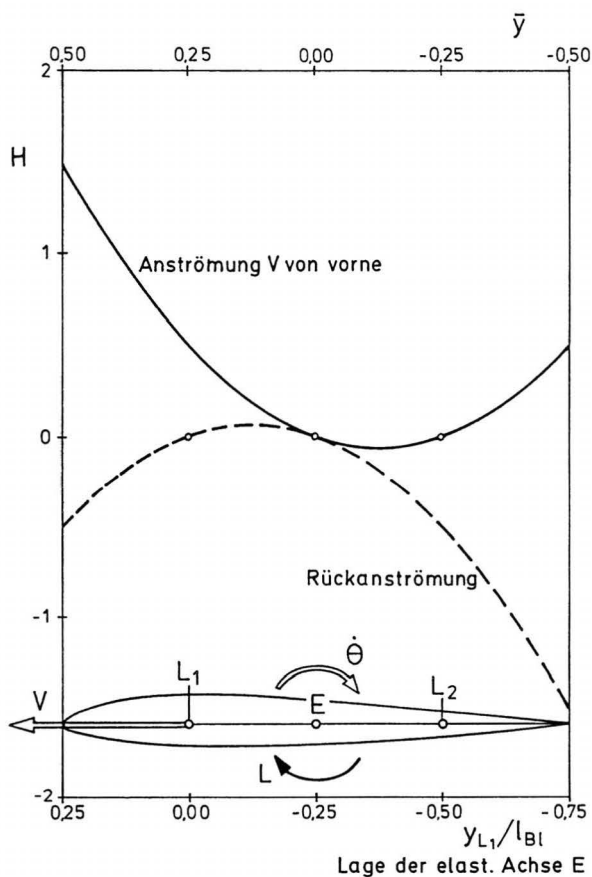


Bild 5.2 Nickdämpfungsfunktionen für normale und rückwärtige Anströmung

5.1.2 Das gekoppelte Schlag-/Torsions-Differentialgleichungssystem

Das für die Untersuchungen zum Einfluß der Torsion verwendete Ersatzmodell ist in [Bild 5.3](#) dargestellt. Die Herleitung der einzelnen Momentenanteile zum Aufstellen der Gleichgewichte um die Gelenkachsen erfolgt analog zum Vorgehen in den Kapiteln 2.3 bis 2.5. Die Beziehungen für die isolierte Schlagbewegung können dabei mit wenig Aufwand um den Einfluß der Torsion erweitert werden.

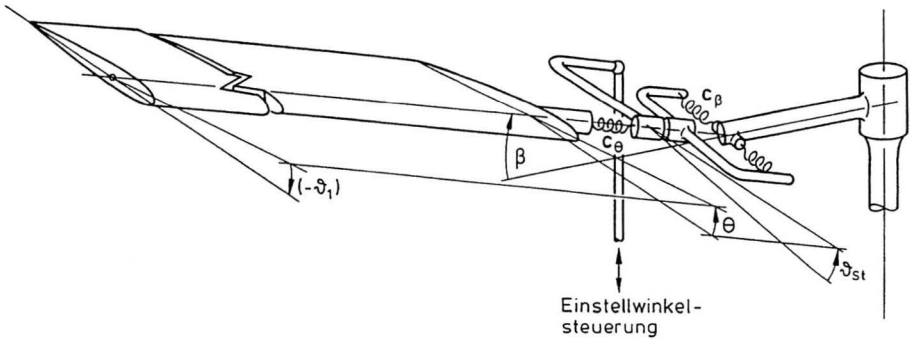


Bild 5.3 Blattersatzmodell für die gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegungen

Für die Massenkraftmomente ergeben sich unter Berücksichtigung der Schwerpunktlage im Profilschnitt nach Bild 2.9 und der im Anhang A.4 definierten Massen(trägheits-)momente bei Vernachlässigung kleiner Terme folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} L^{Tr\ddot{a}gh.} &= [-J^{EE}(\Theta'' + \vartheta_{St}'') + J^{EP}\beta'']\Omega^2 \\ M^{Tr\ddot{a}gh.} &= [-J^{PP}\beta'' + J^{EP}(\Theta'' + \vartheta_{St}'')]\Omega^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} L^{Zentrif.} &= \left[-J^{EE}(\Theta + \vartheta_{St}) + J^{EC} \left[\beta - \frac{y_S}{R}\vartheta_1 \right] \right] \Omega^2 \\ M^{Zentrif.} &= \left[-J^{CP}\beta + J^{EC}(\Theta + \vartheta_{St}) + J^{CC} \frac{y_S}{R}\vartheta_1 \right] \Omega^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} L^{Gewicht} &= S^E g \\ M^{Gewicht} &= -S^P g \end{aligned} \quad (5.16)$$

Für die rückstellenden Momente der Gelenkersatzfedern erhält man

$$\begin{aligned} L^{Feder} &= -c_\theta \Theta = -J^{SS} \bar{\omega}_\theta^{nr^2} \Omega_{nenn}^2 \Theta \\ M^{Feder} &= -c_\beta \beta = -J^{PP} \bar{\omega}_\beta^{nr^2} \Omega_{nenn}^2 \beta \end{aligned} \quad (5.17)$$

In der Definition für die dimensionslose Anschlußsteifigkeit wird auf das von der Lage der elastischen Achse unabhängige Trägheitsmoment um die Schwerpunktklinie bezogen.

Damit beschreibt $\bar{\omega}_\Theta^{nr}$ die *reale* Eigenfrequenz des nichtdrehenden Blattes nur dann, wenn kein STEINER-Anteil infolge einer Schwerpunktlage $y_s \neq 0$ im effektiven Torsionsträgheitsmoment J^{eff} auftritt.

$$\bar{\omega}_\Theta^{nr} = \frac{\sqrt{c_\Theta / J^{SS}}}{\Omega_{nenn}} \quad (5.18)$$

Beispiele für die sich aus dem Zusammenwirken von Trägheits-, Zentrifugal- und Federkraftmomenten ergebenden Eigenfrequenzverläufe im Vakuum zeigt Bild 5.4. Man erkennt, daß die Torsionseigenfrequenz ähnlich wie die Schlageigenfrequenz mit der Drehzahl ansteigt, jedoch insgesamt deutlich höher liegt. Die hier verwendeten Steifigkeitswerte erweisen sich in den weiteren Untersuchungen als sinnvolle Wahl (siehe Bilder 5.10, 5.13, 5.14 und 5.17); bei üblicher Auslegung des Blattes und des Steuergestänges liegen sie eher im Bereich von $\bar{\omega}_\Theta^{nr} = 3 \dots 5$ (vgl. [34]).

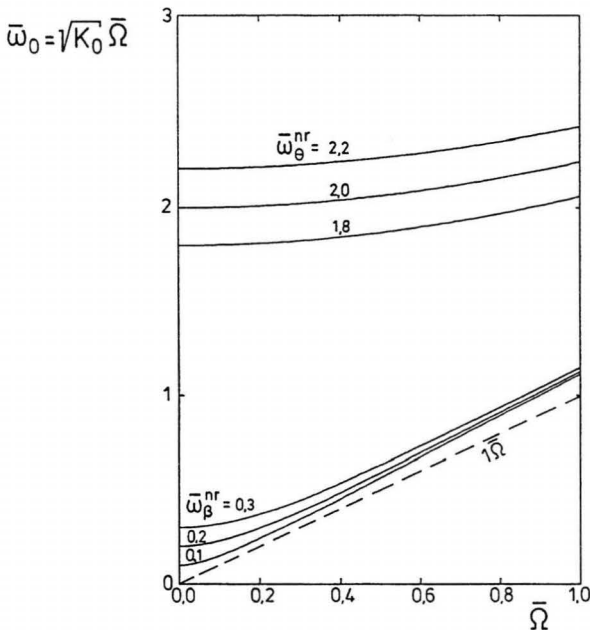


Bild 5.4 Beispiele für den Verlauf der Blatteigenfrequenzen im Vakuum

Führt man noch die entsprechende Blattmassenkonstante für die Torsionsbewegung ein

$$\gamma_{\theta} = \frac{\frac{\rho}{8} C_{aa} I_{B!}^2 R^3}{J_{EE}} , \quad (5.19)$$

ergibt sich als gekoppeltes Differentialgleichungssystem

$$\underline{J}\underline{\chi}'' + \text{diag } \underline{\gamma}\underline{D}(\psi)\underline{\chi}' + \left[\text{diag } \underline{\gamma}\underline{K}(\psi) + \underline{K}_0 \right] \underline{\chi} = \left[\text{diag } \underline{\gamma}\underline{E}(\psi) + \underline{E}_0 \right] \underline{\vartheta} + \underline{F}_0 \quad (5.20)$$

$$\text{mit } \underline{\chi} = \begin{bmatrix} \beta \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \underline{\vartheta} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_{St} \\ \vartheta'_{St} \\ \vartheta''_{St} \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta} \\ \gamma_{\theta} \end{bmatrix} .$$

Für die Matrizenelemente ergeben sich verhältnismäßig umfangreiche Ausdrücke. Sie sind zusammen mit dem konstanten Vektor \underline{E}_0 der rechten Seite als Gleichungen (A.16) bei (A.23) im Anhang A.6 zusammengestellt. Ebenfalls dort finden sich in den Bildern A.2 bis A.4 die Verläufe der periodischen Koeffizienten.

5.1.3 Die statische Schlag-/Torsions-Divergenz

Auch bei den Untersuchungen zum Einfluß der Torsionsbewegung sei als erster Schritt das statische Divergenzproblem behandelt. Die Torsionsdivergenz ist ein insbesondere bei Starrflügeln gefürchtetes Phänomen und in der Literatur ausgiebig behandelt (siehe z.B. [51]). Für den hier zu behandelnden Fall der gekoppelten Blattbewegungen lautet die statische Gleichgewichtsbedingung analog zu Kap. 4.2

$$\left[\text{diag } \underline{\gamma}\underline{K}(\psi) + \underline{K}_0 \right] \underline{\chi} = \left[\text{diag } \underline{\gamma}\underline{E}(\psi) + \underline{E}_0 \right] \underline{\vartheta} + \underline{F}_0 . \quad (5.21)$$

Die Auslenkungen gehen gegen unendlich, sobald das Gleichungssystem singular wird; Stabilität geht also verloren für

$$\det \left[\text{diag } \underline{\gamma}\underline{K}(\psi) + \underline{K}_0 \right] = 0 . \quad (5.22)$$

Anhand des einfachen entkoppelten Falls im Schwebeflug werden zunächst die grundsätzlichen Zusammenhänge aufgezeigt. Solange mit $y_s = 0$ der Profilschwerpunkt S in der Drehgelenkachse E liegt, koppelt die Schlagbewegung nicht in den Torsionsfreiheitsgrad. Damit wird die Grenze der statischen Stabilität für die isolierte Torsionsbewegung durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\gamma_\theta K_{22}(\psi) + K_{022} = 0 \quad (5.23)$$

Im Schwebeflug ist der Steifigkeitsterm K_{22} vom Rotorumlaufwinkel ψ unabhängig, und man erhält mit $\bar{\Omega} = 1$ durch Auflösen die erforderliche Torsionssteifigkeit zu

$$\bar{\omega}_\theta^{nr} = \sqrt{-\gamma_\theta \frac{y_{L1}}{I_{Bl}/4} D_3 - 1} \quad (5.24)$$

Bild 5.5 zeigt für die Referenzdaten (siehe Anhang A.1) die Divergenzempfindlichkeit des Rotorblattes in Abhängigkeit von der Lage der elastischen Achse. Liegt die Gelenkachse mit $y_{L1} > 0$ vor dem (grundsätzlich in L_1 angenommenen) vorderen Luftangriffspunkt, wirken die Luftkräfte immer rückstellend, und Divergenz ist ausgeschlossen.

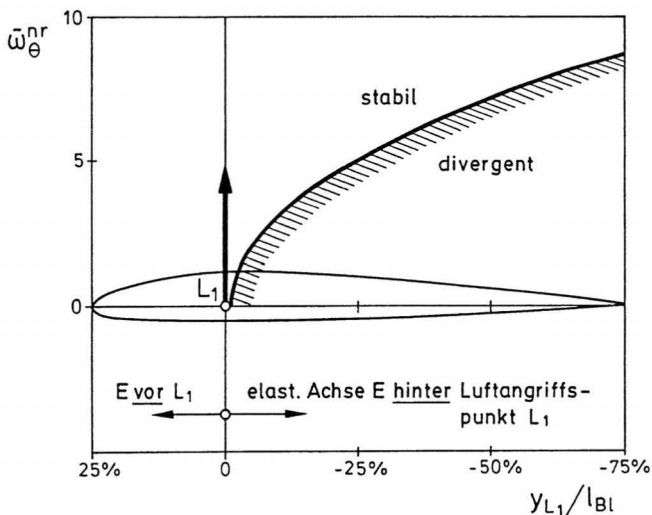


Bild 5.5 Grenze der statischen Torsionsdivergenz im Schwebeflug ($y_s = 0$)

Wird die elastische Achse dagegen nach hinten verschoben ($y_{L1} < 0$), muß eine zunehmend steife Gelenkfeder die auskippenden Luftkraftmomente kompensieren. Der kleine stabilisierende Anteil infolge der Zentrifugalkräfte vermag im vorliegenden Beispiel E-Rücklagen von gerade $0.01 I_{Bl}$ auszugleichen.

Bei den weiteren Betrachtungen wird nun jeweils das Divergenzverhalten des isolierten Torsionsfreiheitsgrades mit dem des gekoppelten Systems verglichen. Die Rechnungen erstrecken sich vom Schwebeflug ($\mu = 0$) bis in die Stillsetzungsphase mit auf $0.02 \Omega_{nenn}$ reduzierter Rotordrehzahl ($\mu = 10$). Dazu wird zunächst bei konstanter (Nenn-)Drehzahl die Fluggeschwindigkeit erhöht, und ab $\mu = 0.2$ bei konstanter (Transitions-)Geschwindigkeit dann in üblicher Weise die Rotordrehzahl abgesenkt. In den Diagrammen ist wieder die der Stabilitätsgrenze entsprechende Anschlußsteifigkeit über dem Fortschrittsgrad und Umlaufwinkel dargestellt. Im gekoppelten Fall liegt die Schlagsteifigkeit konstant bei $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.2$, einem bei isolierter Betrachtung für alle μ und ψ statisch stabilen Wert (vgl. Kap. 4.2). Im ersten Beispiel, Bild 5.6, liegen sowohl der Profilschwerpunkt S als auch die elastische Achse E im vorderen Luftangriffspunkt L_1 . Dies entspricht in etwa einer klassischen Blattauslegung.

Für den isolierten Torsionsfreiheitsgrad (links) liegen die kritischen Umlaufwinkel bei $\psi = 270^\circ$, also dort, wo sich im Rückanströmgebiet die größten Staudrücke ergeben. Es sei daran erinnert, daß Divergenz bei gegebener mechanischer Auslegung mit Überschreiten eines bestimmten Grenzstaudrucks bei der sogenannten Divergenzgeschwindigkeit auftritt, siehe dazu [51]. Für das vorlaufende Blatt besteht keine Divergenzgefahr (vgl. Bild 5.5). Schon mit $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 2.0$ ist aber für alle Fortschrittsgrade statische Stabilität sichergestellt.

Im gekoppelten Fall (rechts) verschieben sich die kritischen Umlaufwinkel zu kleineren Werten. Dies entspricht der vom Flugzeugentwurf her bekannten Tatsache, daß vorwärts gepfeilte Tragflächen anfälliger sind für Biege-/Torsionsdivergenz als rückgepfeilte. Physikalisch ist der gleiche Mechanismus wirksam, der sich bei der Blattwinkelrücksteuerung durch die schräggestellte Schlaggelenkachse ergibt. Die bei großen Fortschrittsgraden erforderliche Torsionssteifigkeit liegt nun bei $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 2.5$.

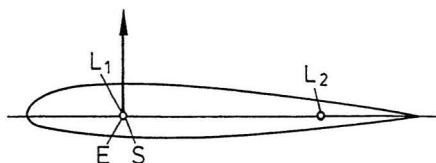
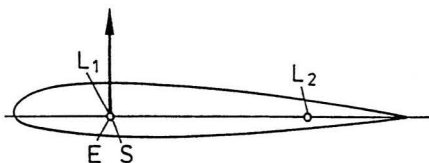
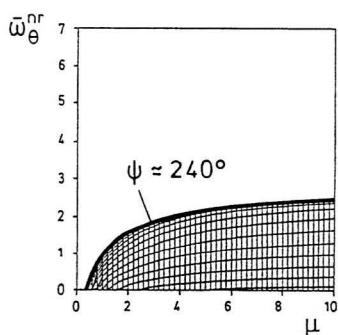
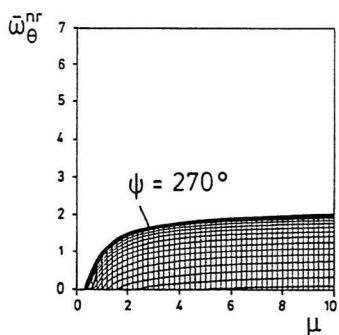
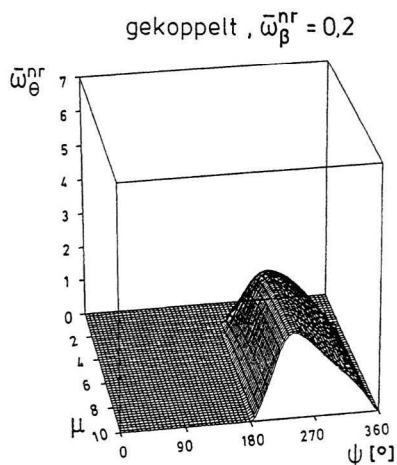
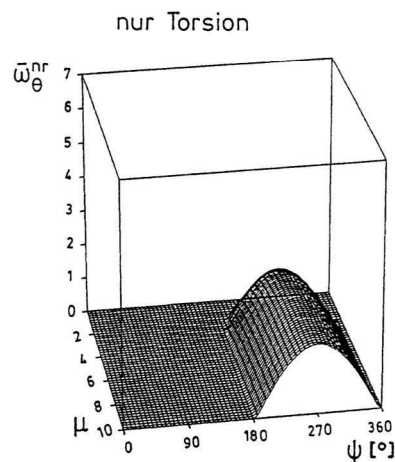


Bild 5.6 Erforderliche Anschlußsteifigkeiten für statische Schlag-/Torsions-Stabilität ($v_s = 0$, $y_{L1} = 0$)

Geht man davon aus, daß bei hohen Fortschrittsgraden die örtlichen Anströmbedingungen am Blatt weniger von der Rotordrehung als von der Fluggeschwindigkeit bestimmt werden, liegt es nahe, das Profil symmetrisch auszubilden. Damit könnten die Stabilitäts-

eigenschaften des vorlaufenden und rücklaufenden Blattes einander angeglichen und die großen Luftkrafthebelarme bei Rückanströmung verringert werden. Bild 5.7 zeigt ein entsprechendes Beispiel mit elastischer Achse und Schwerpunkt in der Profilmitte.

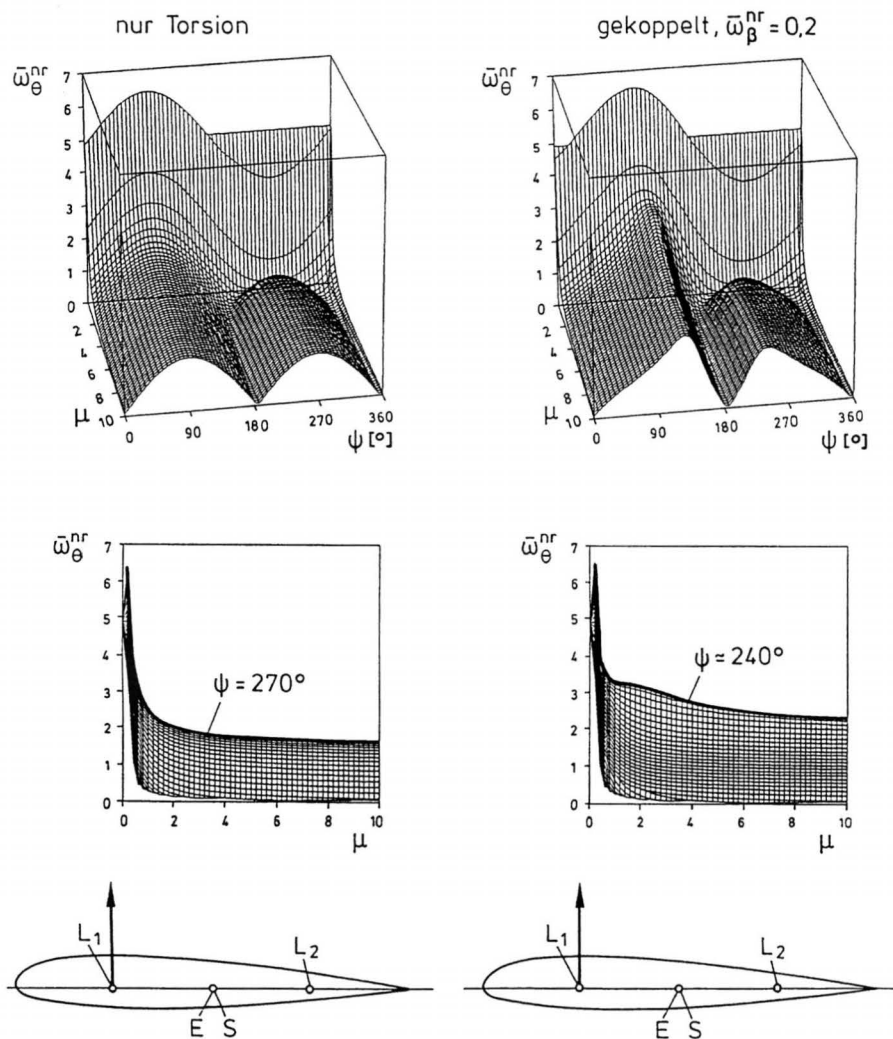


Bild 5.7 Erforderliche Anschlußsteifigkeiten für statische Schlag-/Torsions-Stabilität ($y_s = 0$, $y_{L1} = -l_{Bl}/4$)

Bei großen Fortschrittsgraden zeigt diese Maßnahme durchaus einen gewissen Erfolg: die erforderlichen Anschlußsteifigkeiten erreichen für das vor- und das rücklaufende Blatt sehr ähnliche, wenn auch mit maximal $\bar{\omega}_0'' = 2.3$ kaum geringere Werte als im vorangegangenen Fall. Völlig inakzeptabel werden die Verhältnisse jedoch bei Transitionsbeginn. Durch die hohen Staudrücke infolge Rotordrehung werden bei $\mu = 0.2$ Torsionssteifigkeiten von bis zu $\bar{\omega}_0'' = 6.6$ erforderlich, welche nur unter großem Aufwand technisch zu realisieren wären. Man erkennt, daß sich bei Rotomenndrehzahl Luftkrafthebelarme der Länge $l_{Bl}/4$ noch wesentlich kritischer auswirken als bei abgesenktem Ω solche der Länge $l_{Bl}/2$. Wie das Profil aufzubauen wäre, um mit möglichst kleinen Anschlußsteifigkeiten auszukommen, zeigen die Diagramme in Bild 5.8.

Dabei unterscheiden sich der entkoppelte und gekoppelte Fall erheblich voneinander. Für die isolierte Torsionsbewegung ergeben sich optimale Verhältnisse, wenn die elastische Achse um $y_{L1} = -0.07 l_{Bl}$ aus dem vorderen Luftangriffspunkt zur Profilmitte verschoben wird. Dies ist trotz der beschriebenen Schwierigkeiten bis zu einem gewissen Grade möglich, da sich die dadurch eintretende Destabilisierung bei Nenndrehzahl durch Ausnutzen der rückstellenden Zentrifugalkräfte ausgleichen läßt. Im dargestellten, rein theoretischen Grenzfall nimmt der Schwerpunkt dazu den maximal möglichen Abstand von der Gelenkachse ein und liegt somit in der Profilhinterkante.

Im gekoppelten Fall erweist sich ebenfalls eine kleine Rückverlegung der elastischen Achse als sinnvoll ($y_{L1} = -0.13 l_{Bl}$), die Auswirkungen von Schwerpunktablagen sind jedoch grundlegend andere. Liegt der Schwerpunkt hinter dem Torsionsgelenk, ergeben sich mit Aufnicken des Profils durch die Zentrifugalkräfte positive Schlagmomente, die die Auskipptendenz der in Flugrichtung weisenden Blätter verstärken. Positive Auswirkungen sind daher in diesem Fall nur mit Schwerpunktvorlagen zu erzielen. Die erforderliche Torsionssteifigkeit läßt sich durch diese Maßnahmen von $\bar{\omega}_0'' = 2.5$ auf 2.1 senken.

Die dargestellten Ergebnisse stehen bezüglich der kritischen Umlaufwinkel in guter Übereinstimmung mit entsprechenden Rechnungen aus [13] und [51], wobei dort jedoch aufwendigere elastische Blattmodelle und abweichende Blattdaten verwendet wurden. Insgesamt stellt sich das Divergenzproblem durch die geringen Staudrücke bei abgesenkter Rotordrehzahl als wenig kritisch heraus. Die zu fordernden Torsionssteifigkeiten liegen noch unter den bei Hubschrauberrotoren heute üblichen Werten.

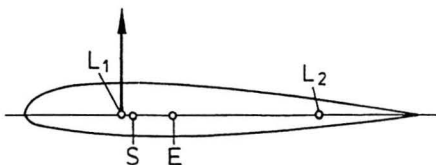
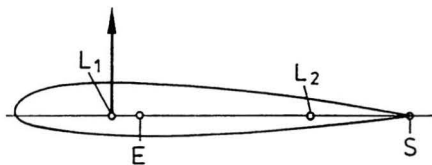
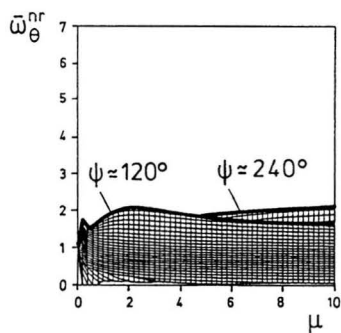
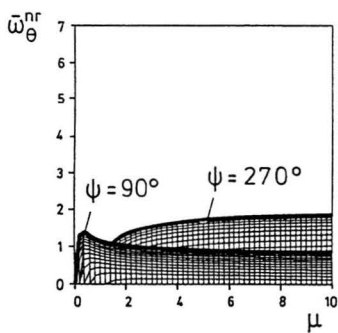
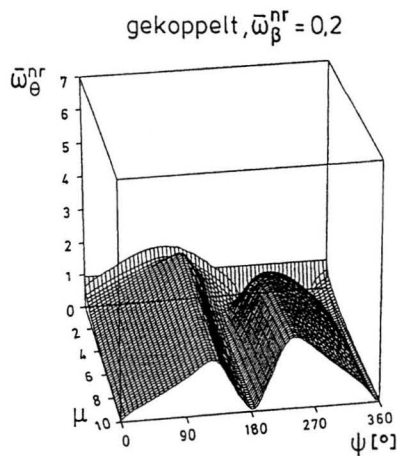
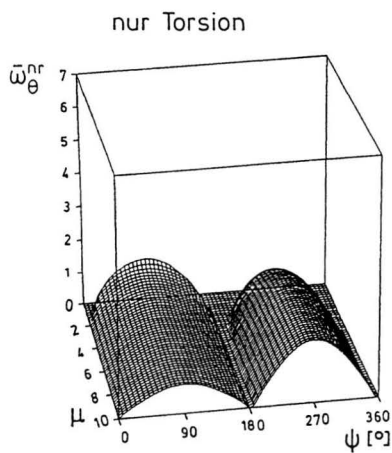


Bild 5.8 Erforderliche Anschlußsteifigkeiten für statische Schlag-/Torsions-Stabilität (nur Torsion: $y_S = 0,68 l_{Bl}$, $y_{L1} = -0,07 l_{Bl}$, gekoppelt: $y_S = -0,10 l_{Bl}$, $y_{L1} = -0,13 l_{Bl}$)

5.1.4 Klassisches Rotorblattflattern im Schwebeflug

Die durch Koppeln der Freiheitsgrade Schlagen (bzw. Biegung) und Torsion möglichen dynamischen Instabilitäten werden als Flattern bezeichnet und sind beim Entwurf von Flächenflugzeugen grundsätzlich Gegenstand umfangreicher Rechnungen und Nachweise (siehe [51]). Bei Rotorblättern liegen die Probleme grundsätzlich ähnlich, es treten aber zusätzlich Zentrifugalkräfte auf. Diese können durch ihre versteifende Wirkung die Stabilität sowohl positiv als durch zusätzliche Kopplungen auch negativ beeinflussen.

Zur Darstellung der prinzipiellen Zusammenhänge und zur Überprüfung des verwendeten mathematischen Modells wird zunächst wieder der Schwebeflug behandelt. Für $\mu = 0$ treten im Differentialgleichungssystem Gl. (5.20) keine periodischen Anteile auf, und die Stabilität läßt sich direkt anhand der Eigenwerte der konstanten Systemmatrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{J}^{-1} \left[\text{diag } \underline{\gamma} \underline{K} + \underline{K}_0 \right] & -\underline{J}^{-1} \left[\text{diag } \underline{\gamma} \underline{D} \right] \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

beschreiben. Es ergeben sich entweder zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare oder zwei rein reelle Wurzeln und ein Eigenwertpaar. In Bild 5.9 sind die Grenzkurven für $\text{Re}(\lambda) = 0$ in der $\gamma_s - \bar{\omega}_s^{\text{nr}}$ -Parameterenebene aufgetragen. Die elastische Achse liegt im (vorderen) Luftangriffspunkt und damit für alle Schwerpunktlagen im $I_{Bl}/4$ -Punkt.

Eine reeller Eigenwert beschreibt für $\lambda = 0$ die aus Kap. 5.1.3 bekannte Divergenzgrenze. Dabei ist jedoch zwischen dem hier dargestellten Fall und der Grenzkurve in Bild 5.5 zu unterscheiden. Während dort der Einfluß des Luftkrafthebelarms behandelt wird, sind es hier Schwerpunktverschiebungen und deren Auswirkungen auf die Zentrifugalkräfte, die das Divergenzverhalten verändern (vgl. auch die Anmerkungen zu Bild 5.8).

Die zweite Grenzkurve betrifft das konjugiert komplexe Eigenwertpaar und liefert die Flattergrenze. Größere Schwerpunktrücklagen sind bei normalen Torsionseigenfrequenzen auch bezüglich der *dynamischen* Stabilität kritisch. Mit der gewählten Schlagsteifigkeit von $\bar{\omega}_s^{\text{nr}} = 0$ ist Bild 5.9 direkt mit den Ergebnissen in [37] und [38] vergleichbar, wobei sich sehr gute Übereinstimmung zeigt. Wie wichtig die Modellierung der Luftkraftdämpfung im Torsionsfreiheitsgrad ist, zeigt sich, wenn man die Rechnung ohne diese Anteile wiederholt. Dann ergibt sich für Torsionssteifigkeiten über ca. $\bar{\omega}_s^{\text{nr}} = 0.6$ unabhängig von der Schwerpunktrücklage dynamisch instabiles Verhalten.

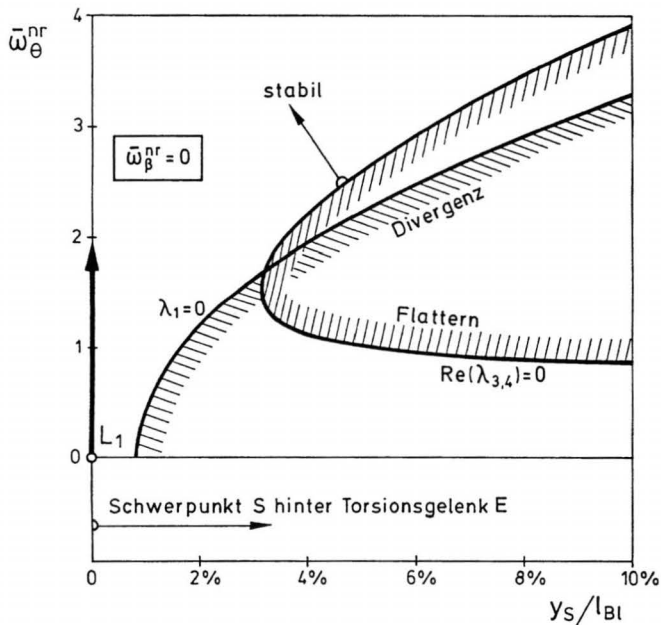


Bild 5.9 Flutter- und Divergenzgrenzen im Schwebeflug ($v_{L1} = 0$)

Da bei der Rotorstillsetzung insbesondere auch das Dämpfungslevel darüber entscheidet, ob die zusätzlichen Parameterresonanzen zur Instabilität führen, zeigt [Bild 5.10](#) den genauen Verlauf der Eigenwerte für den Schnitt $\bar{\omega}_\theta^{nr} = 2.0 = \text{const.}$ Man erkennt, daß eine Verschiebung des Profilschwerpunktes nach vorne zwar den Torsionsfreiheitsgrad stabilisiert, dafür jedoch die Dämpfung der Schlagbewegung verringert. Für $y_S = 0$ sind im Schwebeflug die beiden Bewegungsformen entkoppelt.

Mit Hilfe des Eigenvektordiagramms [Bild 5.11](#) für den Fall der periodischen Bewegung an der Stabilitätsgrenze ($y_S / l_{Bl} = 0.036$, siehe [Bild 5.10](#)) läßt sich leicht klären, welche Mechanismen für das Flattern verantwortlich sind. Für die Eigenfrequenzen und Dämpfungen der entkoppelten Teilsysteme ergeben sich bei Anregung mit der auftretenden Flutterfrequenz $\omega = 1.59 \Omega$ Nacheiltwinkel von $\varphi = -144^\circ$ für die Schlagbewegung (überkritische Anregung) bzw. $\varphi = -36^\circ$ für die Torsionsbewegung (unterkritische Anregung). Der Vergleich mit den Phasenlagen im Eigenvektordiagramm ergibt, daß

- die Torsionsbewegung vorwiegend auf Schlagbeschleunigungen, d.h. die Bewegungen des hinter der Drehachse liegenden Profilschwerpunktes antwortet,
- die Schlagbewegung dagegen primär vom Torsionswinkel, also von den dadurch gesteuerten Luftkräften angeregt wird.

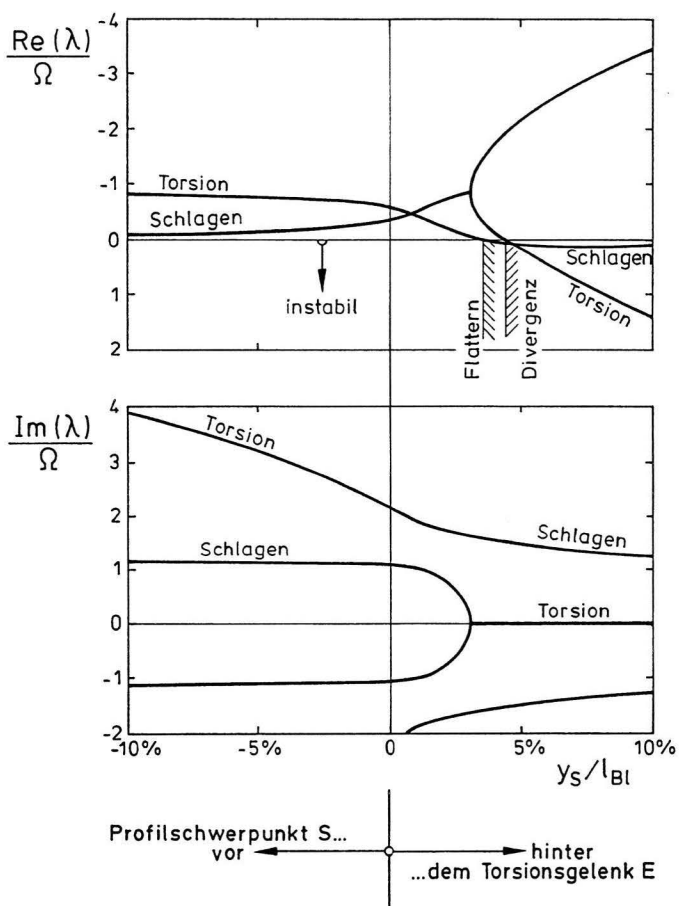


Bild 5.10 Stabilität der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegungen in Abhängigkeit von der Lage des Profilschwerpunktes (Schwebeflug $\mu = 0$, $\bar{\omega}_\beta'' = 0$, $\bar{\omega}_\theta'' = 2.0$, $y_{L1} = 0$)

Somit ist es auch in Hinblick auf die Flutterinstabilität zumindest für den Schwebeflug sinnvoll, den Profilschwerpunkt (ggf. durch Trimmgewichte) in die Nähe der Torsionsdrehachse zu legen.

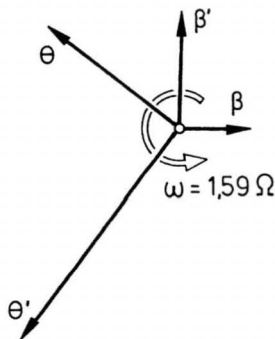
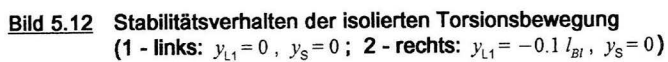


Bild 5.11 Eigenvektordiagramm der periodischen Schlag-/Torsionsbewegung an der Stabilitätsgrenze bei $y_S/I_{Bl} = 0,036$ (Schwebeflug, $\mu = 0$, $\bar{\omega}_{\beta}'' = 0$, $\bar{\omega}_{\theta}'' = 2,0$, $y_{L1} = 0$)

5.1.5 Die dynamische Stabilität des isolierten Torsionsfreiheitsgrades

Bei großen Fortschrittsgraden während der Rotorstillsetzung kommt es auch in der Torsionsbewegung zu Parameterresonanz. Wie aus dem Verlauf des periodischen Steifigkeitskoeffizienten in Bild A.3 (siehe Anhang A.6) hervorgeht, ist der Einfluß der Luftkräfte hier noch schädlicher als bei der Schlagbewegung. Der Koeffizient $K_{22}(\psi)$ ist für große μ nicht nur stark schwankend, sondern bewirkt durch seinen immer negativen Mittelwert eine zusätzliche Destabilisierung. Bild 5.12 zeigt einige Beispiele für das Stabilitätsverhalten der isolierten Torsionsbewegung.

Die linke Spalte betrifft den klassischen Fall mit $y_{L1} = y_S = 0$. Man erkennt die von der Schlagbewegung her bekannte Struktur: ein linearer Anstieg der Dämpfungswerte wird unterbrochen durch eine dichte Folge von Parameterresonanzen, die jeweils einen der beiden Realteile destabilisieren. Zur groben Abschätzung der Häufigkeit der Parameterresonanzen sei angenommen, daß bei großen μ Luft- und Zentrifugalkräfte klein gegenüber den Federkräften sind.



Resonanzstellen ergeben sich dann jeweils ungefähr bei

$$\omega_0^* = \sqrt{K_0} \Omega \approx \frac{n}{2} \Omega, \quad (5.26)$$

woraus für den Abstand der Parameterresonanzgebiete folgt

$$\Delta\mu \approx \frac{\mu_{nenn}}{2\bar{\omega}^{nr}}. \quad (5.27)$$

Entsprechend hoch ist die Resonanzdichte im Torsionsfreiheitsgrad. Eine Vergrößerung der Ersatzfedersteifigkeit wirkt hier in zweifacher Weise. Zum einen verringert sich wie bei der Schlagbewegung der Gradient, mit dem die Destabilisierung über μ zunimmt, zum anderen verschiebt sich das Einsetzen der Parameterresonanzen zu größeren Fortschrittsgraden. Ab einer Steifigkeit von $\bar{\omega}_0^{nr} = 2.03$ ist im isolierten Torsionsfreiheitsgrad Stabilität für alle μ sichergestellt.

Für die rechts dargestellten Rechnungen wurde die elastische Achse (und mit ihr der Profilschwerpunkt) in Richtung der Profilmittte verschoben. Es zeigt sich die gleiche Tendenz wie bei den Betrachtungen zur statischen Stabilität (vgl. Kap.5.1.3). Eine eher symmetrische Profilauslegung bringt gewisse Vorteile bei großen Fortschrittsgraden, verursacht auf der anderen Seite aber erhebliche Probleme bei Stillsetzungsbeginn.

5.1.6 Untersuchungen zur Stabilität der gekoppelten Bewegung

Interessanter als die Betrachtung der entkoppelten Bewegungen ist die Frage, ob die Wechselwirkungen zwischen Schlagen und Torsion auch bei hohen Fortschrittsgraden die Stabilität entscheidend beeinflussen. In [Bild 5.13](#) werden Rechnungen ohne und mit Kopplungen (zunächst für $y_{L1} = y_S = 0$) verglichen. Die Schlagsteifigkeit liegt mit $\bar{\omega}_S^{nr} = 0.1$ an der Stabilitätsgrenze für den isolierten Freiheitsgrad.

Deutlich sind Kopplungen zwischen den Bewegungen festzustellen; in bestimmten Bereichen entstehen zusätzliche Parameterresonanzgebiete von einer Breite, die bei isolierter Betrachtung nicht auftritt. Während der wegen zu geringer Torsionssteifigkeit schon instabile Fall (obere Diagramme) kaum weiter destabilisiert wird, führen die Kopplungen für die

isoliert stabilen Grenzfälle ab ca. $\mu = 10$ zu Instabilitäten (mittlere Diagramme). Schon ab $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.1$ und $\bar{\omega}_\theta^{nr} = 2.2$ sind die Wechselwirkungen jedoch verhältnismäßig gering und auch die gekoppelten Bewegungen bleiben im gesamten betrachteten Bereich stabil (untere Diagramme).

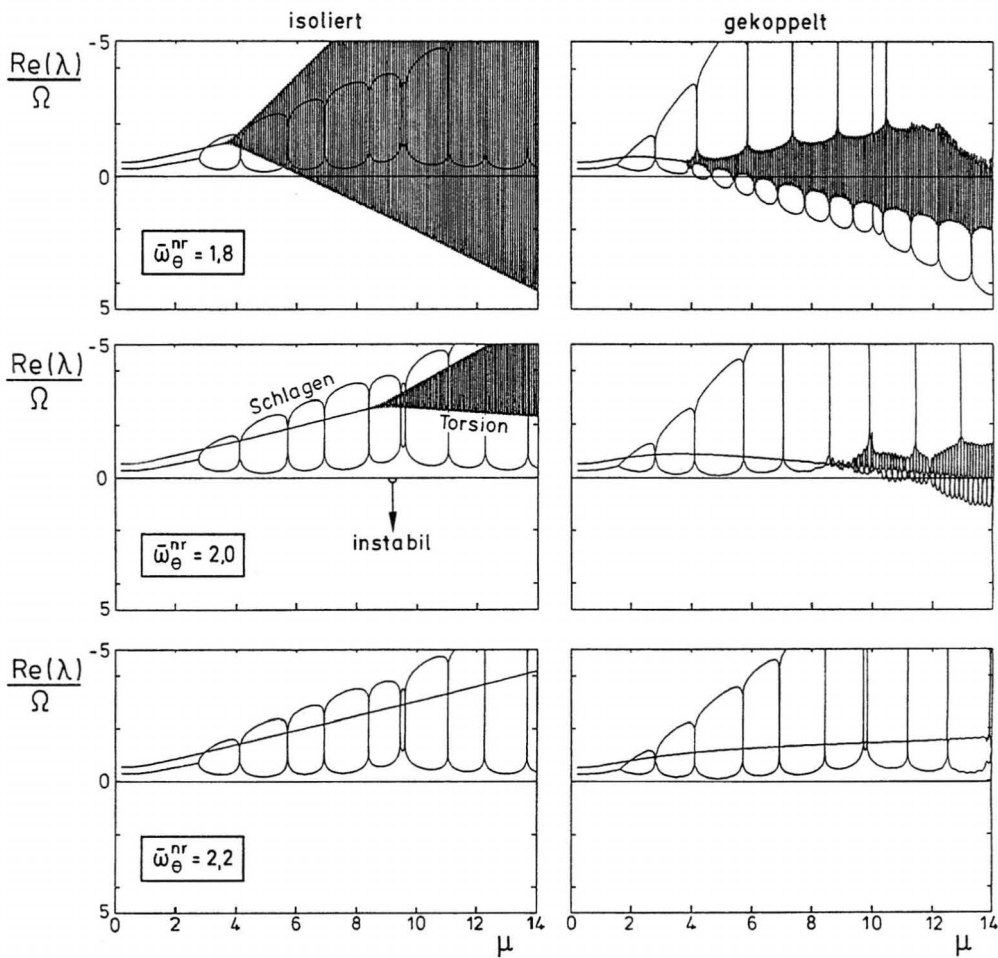


Bild 5.13 Stabilitätsverhalten der isolierten (links) und gekoppelten (rechts) Schlag-/Torsionsbewegungen ($y_{L1} = 0$, $y_S = 0$)

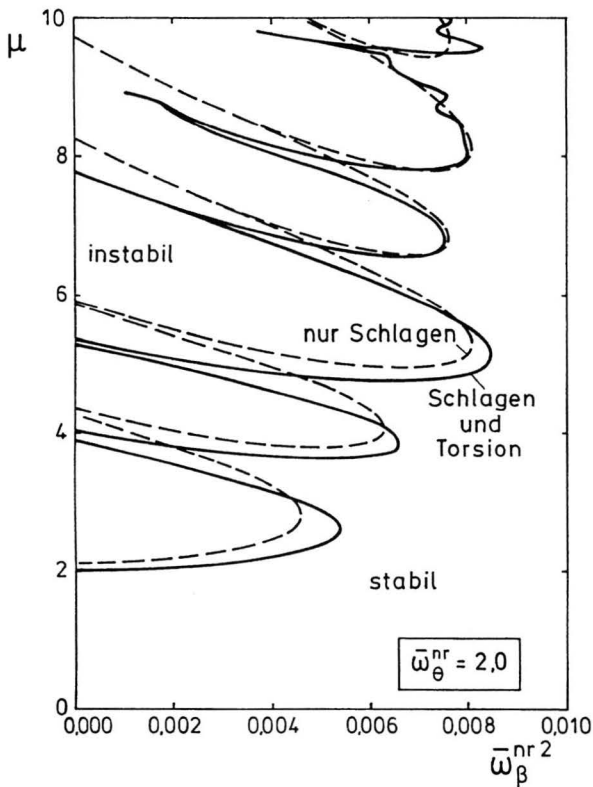


Bild 5.14 Stabilitätskarte der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegungen für die konstante Torsionssteifigkeit $\bar{\omega}_{\theta}^{nr} = 2,0$

Bild 5.14 zeigt für $\bar{\omega}_{\theta}^{nr} = 2,0$ die Auswirkungen der Torsionsbewegung auf die Stabilitätskarte der Schlagbewegung (vgl. Bild 4.9 und 4.28). Man erkennt, daß die Struktur der Parameterresonanzbereiche bis ca. $\mu = 8$ primär von der Schlagbewegung geprägt wird; es ergeben sich lediglich leichte Verschiebungen zu größeren erforderlichen Schlagsteifigkeiten. Bei größeren Fortschrittsgraden deutet sich dagegen eine dichtere Folge von Resonanzgebieten an (vgl. Bild 5.13 Mitte rechts).

Die analoge Darstellung für eine konstante Schlagsteifigkeit von $\bar{\omega}_{\beta}^{nr} = 0,1$ liefert Bild 5.15. Für die isolierte Torsionsbewegung ist die dichte Folge von Resonanzgebieten nicht mehr aufzulösen, da das verwendete Höhenliniensuchverfahren nicht in der Lage ist, den extrem schmalen Tälern zwischen den Parameterresonanzen zu folgen.

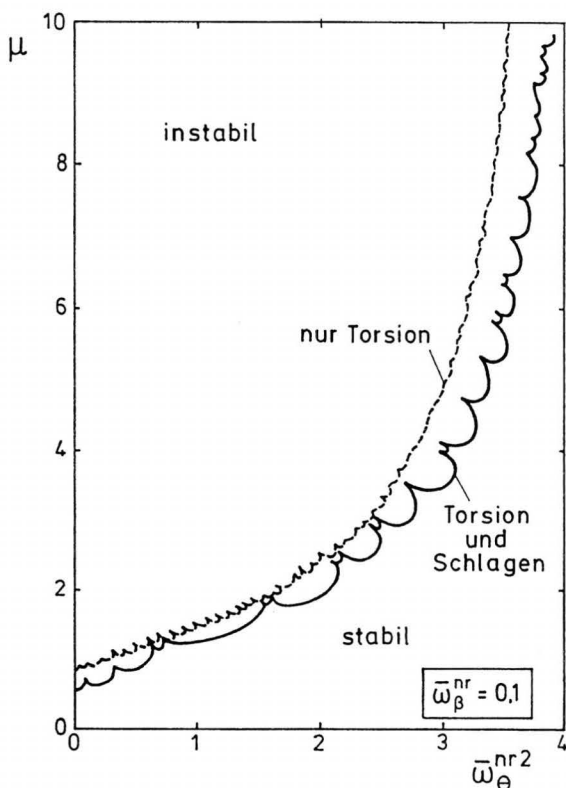


Bild 5.15 Stabilitätskarte der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegungen für die konstante Schlagsteifigkeit $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.1$

Im gekoppelten Fall ergibt sich eine geänderte Struktur mit einer mittleren Resonanzgebietbreite. Auch in dieser Stabilitätskarte erhöhen sich die erforderlichen Steifigkeiten infolge der Kopplungen nur wenig.

Ähnliche Untersuchungen zur Stabilität der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegungen findet man in [92]. Die Autoren gehen in ihrer Arbeit auch kurz auf die besonderen Verhältnisse bei Stopp-Rotoren ein, und teilweise erstrecken sich die dargestellten Rechnungen sogar bis zu Fortschrittsgraden von $\mu = 2.4$. Die präsentierten Stabilitätskarten sind allerdings nicht direkt mit den für die vorliegende Arbeit berechneten vergleichbar. Die Stabilitätsgrenzen sind dort in der $\omega_{0\theta} - \gamma$ -Parameterebene dargestellt, also in Abhängigkeit jener Größen, die eher für den Betrieb des Rotors bei Nenndrehzahl relevant sind.

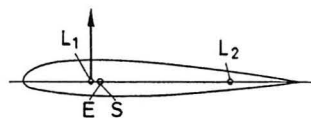
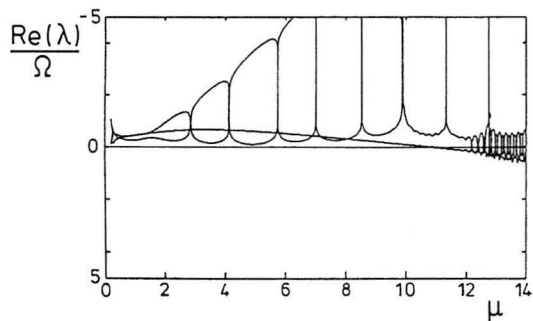
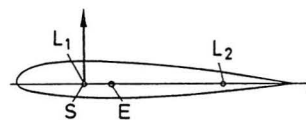
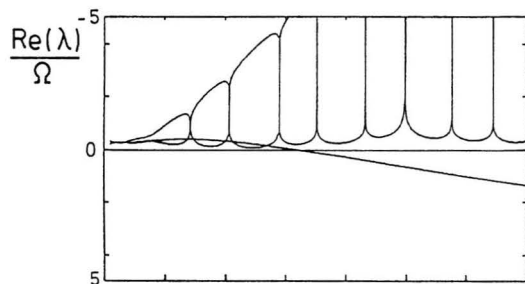
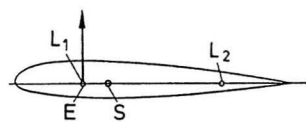
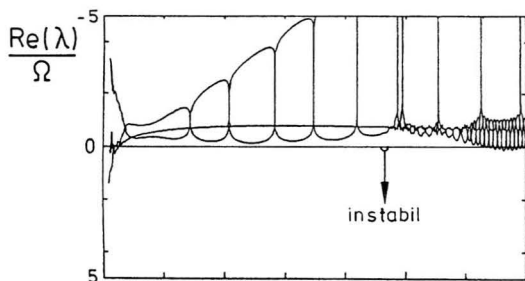
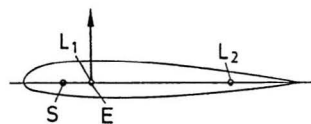
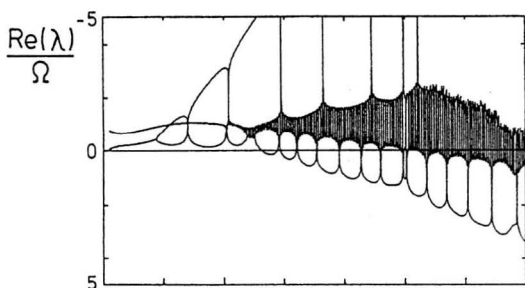


Bild 5.16 Stabilitätsverhalten der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegungen für verschiedene Profilauslegungen

Ihre Schlußfolgerungen weisen jedoch in die gleiche Richtung. Es wird der leicht destabilisierende Einfluß des Torsionsfreiheitsgrades auf die Schlagbewegung festgestellt und die stabilisierende Wirkung hoher Anschlußsteifigkeiten beschrieben.

Der Einfluß der Profilauslegung auf die Kopplungen bei hohen Fortschrittsgraden geht schließlich aus Bild 5.16 hervor, als Referenz siehe Bild 5.13 Mitte rechts. Das erste Diagramm zeigt, daß Schwerpunktlagen vor der elastischen Achse bei großen μ anders als im Schwebeflug die negativen Auswirkungen der Kopplung wesentlich verstärken. Schwerpunktrücklagen sind dagegen vorteilhaft, stoßen jedoch wegen der beschriebenen negativen Effekte bei Stillsetzungsbeginn an ihre Grenzen (zweites Diagramm). Verschiebt man das Torsionsgelenk in Richtung Profilmittte, ändert sich zwar der Charakter der Kopplungen, das Stabilitätsverhalten verbessert sich aber nicht (drittes Diagramm). Geringfügig bessere Verhältnisse als im Referenzfall ergeben sich nur bei Rückverlegung von Schwerpunkt und elastischer Achse um $0.03 l_{Bl}$ ($y_{L1} = -0.03 l_{Bl}$, $y_S = 0$, letztes Diagramm). Der Stabilitätsgewinn ist dabei jedoch so gering, daß - und dies ist sicher ein bemerkenswertes Ergebnis - auch bei einem Stopp-Rotor von der klassischen Blattauslegung mit annähernd $y_{L1} = y_S = 0$ ausgegangen werden sollte.

5.1.7 Selbsterregung und Grenzzykel

Bei dem in Kap. 5.14 behandelten Phänomen des Schlag-/Torsionsflatterns handelt es sich um eine selbsterregte Schwingung durch Kopplung zweier Freiheitsgrade. Selbsterregung kann jedoch auch in der isolierten Torsionsbewegung auftreten; eine derartige Erscheinung ist das sogenannte Abreiß- oder Stallflattern. Dabei sind es die Nichtlinearitäten im Bereich der Strömungsablösung, die zum Auftreten von Grenzzykeln führen können. Das folgende stark vereinfachte Beispiel soll nur die prinzipiellen Zusammenhänge aufzeigen.

Ein stillgesetztes Rotorblatt klassischer Profilauslegung ($y_{L1} = y_S = 0$) mit einer Torsionssteifigkeit von $\bar{\omega}_\theta^2 = 2.0$ werde bei $\psi = 270^\circ$ von der Hinterkante rein tangential angeströmt. Dann entspricht der effektive Anstellwinkel direkt dem negativen Torsionswinkel. Der Auftrieb wachse innerhalb der Abreißgrenzen $\pm \alpha_{Stall} = 15^\circ$ linear mit α_{eff} und bleibe für betragsmäßig größere Winkel zunächst konstant (vgl. im Anhang A.9 Bild A.7). Für das Luftkraftmoment ergibt sich mit dem Hebelarm $l_{Bl}/2$

$$L^{Luft}(\Theta) = \frac{\rho}{4} V^2 C_{aa} (B - A) R l_{Bl}^2 \bar{\Theta} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \bar{\Theta} &= \Theta & \text{für } -\alpha_{Stall} < \Theta < \alpha_{Stall} \\ \bar{\Theta} &= -\alpha_{Stall} & \text{für } \Theta < -\alpha_{Stall} \\ \bar{\Theta} &= \alpha_{Stall} & \text{für } \Theta > \alpha_{Stall} \end{aligned}$$

Im Bereich der Strömungsablösung kann die Torsionsdämpfung negative Werte annehmen, siehe z.B. die Betrachtungen in [38]. Hier sei vereinfachend angenommen, daß der Dämpfungsgrad in einem Bereich von 5° jenseits der Abreißgrenzen bei $D^* = -3\%$ und für alle anderen Anstellwinkel bei $D^* = 3\%$ liegt. Die entsprechende Differentialgleichung ergibt sich dann zu

$$\ddot{\Theta} + 2D^*(\Theta) \sqrt{\frac{c_\Theta}{J_{SS}}} \dot{\Theta} + \frac{1}{J_{SS}} [c_\Theta \Theta - L^{Luft}(\Theta)] = 0 \quad (5.29)$$

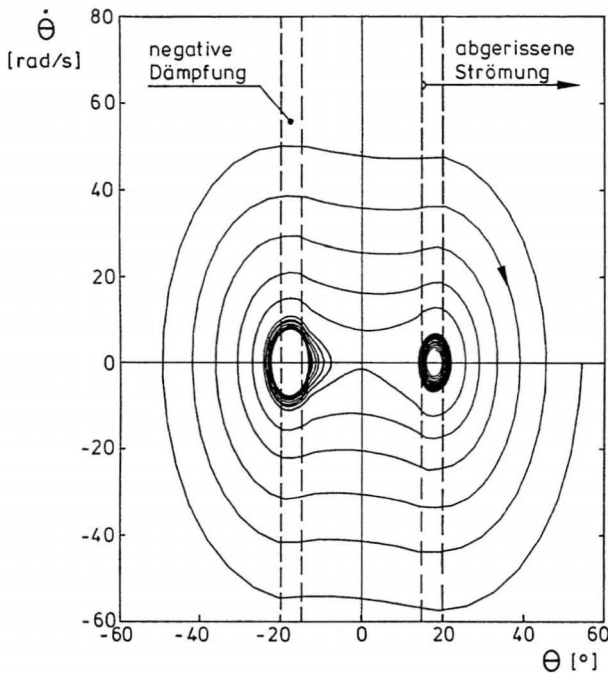


Bild 5.17 Grenzzykel in der Phasenebene für ein vereinfachtes Modell zum Abreißflattern

Bild 5.17 zeigt zwei Trajektorien zu dieser Gleichung in der Phasenebene; die Anfangsbedingungen lauten: $\dot{\Theta} = 5 \text{ rad/s}$, $\Theta = 17^\circ$ bzw. $\dot{\Theta} = 0$, $\Theta = 52^\circ$. Es entstehen zwei stabile Grenzzykel, die jeweils einen instabilen Strudelpunkt umschließen. Die Frequenz der Grenzschrwingungen liegt ganz geringfügig unter $\bar{\omega}_{\Theta}^{\text{nr}} \Omega_{\text{nenn}}$.

Grenzzykel können z.B. durch Steifigkeitskennlinien mit Hysteresesecharakter auch bei ausschließlich positiver Dämpfung auftreten. Da die Verläufe der Auftriebs- und Nickmomentbeiwerte bei Berücksichtigung periodischer Torsionsbewegungen derartige Hystereseschleifen aufweisen, ist dies eine weitere mögliche Ursache für selbsterregte (Grenz-) Schwingungen im Torsionsfreiheitsgrad. Ausführlicher werden diese Effekte z.B. in [93] diskutiert. Während des Stillsetzungsvorgangs treten in den Differentialgleichungskoeffizienten jedoch so starke Periodizitäten auf, daß die Parametererregung die hier beschriebenen Schwingungsursachen i.a. verdeckt.

5.2 Die Schwenkbewegung

Im Gegensatz zur Torsionsbewegung sind die Kopplungen der Schwenkbewegung mit anderen Blattfreiheitsgraden wesentlich schwächer. Dies gilt insbesondere auch während des Stillsetzungsvorgangs. Die durch das Schwenken selbst verursachten Luftkräfte sind grundsätzlich klein, und die Schwankungen des induzierten Widerstandes infolge von Auftriebsänderungen bleiben bei entlastetem Rotor ebenfalls gering. Für Massenkraftkopplungen sind primär Corioliskräfte verantwortlich. Der Einfluß der normalerweise berücksichtigten Terme hängt jedoch linear vom mittleren Schlagwinkel ab, und auch dieser bleibt für den entlasteten Rotor vergleichsweise klein. Beispielrechnungen zum Verhältnis von Luft- zu Corioliskräften findet man z.B. in [36] oder [97]. Da die Schwenkbewegung ohne zusätzliche technische Maßnahmen i.a. aber nur schwach gedämpft ist, besteht dennoch die Gefahr, daß bei gleichzeitiger Parametererregung schon schwache Kopplungen Stabilitätsprobleme verursachen.

5.2.1 Erweiterung des aerodynamischen Modells um Schwenk-Luftkraftmomente

Wie Bild 2.10 erkennen läßt, müssen bei der Formulierung der Schwenkmomente insbesondere Widerstandskräfte berücksichtigt werden. Ein oft verwendeter Ansatz für die Schwenkluftkraft am Blattelement lautet in Beiwertschreibweise

$$C_y = C_{w0} + C_{w2}\alpha_{eff}^2 - \varphi C_{a\alpha}\alpha_{eff} \quad (5.30)$$

Dieser relativ genaue Ansatz verursacht in der mathematischen Behandlung jedoch erhebliche Probleme. Zum einen ist C_y in dieser Form nichtlinear von den Zustandsgrößen abhängig, zum anderen wird eine Berücksichtigung der Rückanströmung analog zu Kap. 2.5.2 unmöglich. Um die Wirkungsrichtung des Widerstandes korrekt zu modellieren, muß der Beiwert C_y mit dem Term $v_{\parallel}|v_{\parallel}|$ verknüpft werden. Dies führt mit der Definition des effektiven Anstellwinkels zu Produkten von Betragstermen unterschiedlicher Größen, die sich nicht wie bei der Schlag- oder Torsionsbewegung durch die Blattintegrale ausdrücken lassen.

Um den Einfluß der einzelnen Summanden in Gl. (5.30) abzuschätzen, wurden Simulationen mit dem nichtlinearen Rotormodell aus [97] durchgeführt. Dabei wurde die Stabilität der Schwenkbewegung in Abhängigkeit von der Modellierung des C_y -Ansatzes untersucht. Die Blatt- und Rotordaten entsprachen den hier verwendeten. Beispielrechnungen für einen entlasteten Rotor mit $\vartheta_1 = -0.2^\circ$ und $\mu = 0.2$ ergaben, daß in diesem Fall 85% der Dämpfung auf den Profilwiderstand C_{w0} , 8.6% auf den induzierten Widerstand C_{w2} und nur 6.4% auf die Neigung des örtlichen Auftriebsvektors zurückzuführen sind. Diese Ergebnisse zeigen, daß es zumindest für den entlasteten Rotor als Näherung zulässig ist, $C_y = C_{w0}$ zu setzen.

Aber auch bei der Formulierung der tangentialen Anströmgeschwindigkeit ergeben sich Probleme. Mit den üblichen Vereinfachungen erhält man die Gleichung

$$v_t = \Omega R \left[x + \mu \sin \psi - \left(x - \frac{a}{R} \right) \xi' - (\mu \cos \psi) \xi \right] \quad (5.31)$$

Im Gegensatz zu dem für Schlag- und Torsionsbewegung verwendeten Ausdruck Gl. (2.27) ist diese Geschwindigkeitskomponente nun zusätzlich von Zustandsgrößen abhängig. Mit dem Quadrieren bei der Formulierung des Staudruckes gehen dann die linearen

Zusammenhänge verloren. Obwohl die Anteile in den Schwenkzustandsgrößen im Vergleich zu den beiden anderen Termen sehr klein sind, sollen diese Abhängigkeiten hier aber nicht wie z.B. in [40] vollständig vernachlässigt, sondern durch lineare Näherungen beschrieben werden. Dadurch bleibt insbesondere der einzige Dämpfungsterm im isolierten Schwenkfreiheitsgrad erhalten. Linearisiert man das Produkt $v_d|v_d|$ um $\zeta' = \zeta = 0$ und wendet somit die Betragsbildung nur auf die ersten beiden Summanden von Gl. (5.31) an, erhält man

$$v_t |v_t| \approx \Omega^2 R^2 \left[x + \mu \sin \psi - 2\left(x - \frac{a}{R}\right)\zeta' - 2(\mu \cos \psi)\zeta \right] |x + \mu \sin \psi|. \quad (5.32)$$

Bild 5.18 veranschaulicht das Prinzip dieser Näherung. In Verbindung mit dem Profilwiderstandsbeiwert C_{w0} ergeben sich aus Gl. (5.32) für die Schwenkdifferentialgleichung später Beiträge zum Dämpfungs- und zum Steifigkeitskoeffizienten.

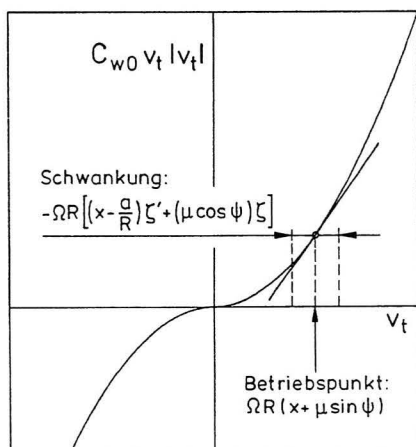


Bild 5.18 Linearisierung des Terms $v_d|v_d|$ im Luftkraftmoment der Schwenkdifferentialgleichung

Damit hat das differentielle Luftkraftmoment um das Schwenkgelenk bei Berücksichtigung der Rückanströmung die Form

$$dN^{Luft} = \frac{\rho}{2} C_{w0} I_{Bl} R^2 v_t |v_t| \left(x - \frac{a}{R}\right) dx. \quad (5.33)$$

Die beschriebene Näherung für das Produkt der Tangentialgeschwindigkeit wird nur für das Luftkraftschwenkmoment verwendet, während zur Formulierung des Schlagmoments weiter mit Gl. (2.27) gearbeitet wird. Die Integration entlang des Blattradius liefert mit den bekannten Blattintegralen schließlich

$$N_{Luft}^L = \frac{\rho}{2} C_{w0} I_{Bl} R^4 \Omega^2 \left\{ -2(C_4^R - \frac{a}{R} C_3^R) \dot{\zeta} / \Omega \right. \\ \left. - 2(C_3^R \mu \cos \psi) \dot{\zeta} \right. \\ \left. + C_4^R + C_3^R \mu \sin \psi \right\} \quad (5.34)$$

5.2.2 Das nichtlinear gekoppelte Schlag-/Schwenk-Differentialgleichungssystem

Das bei der Herleitung des gekoppelten Schlag-/Schwenk-Differentialgleichungssystems zu Grunde gelegte Blattersatzmodell ist in Bild 5.19 dargestellt. Die fiktiven Gelenkabstände für Schlag- und Schwenkfreiheitsgrad werden als identisch angenommen (vgl. Kap. 2.3.2). Weitere Details zur Gelenkfolge und zu den verwendeten Koordinatensystemen entnehme man Bild 2.9. Im folgenden sind die übrigen Momentenanteile für die Gleichgewichte um die Gelenkachsen aufgelistet.

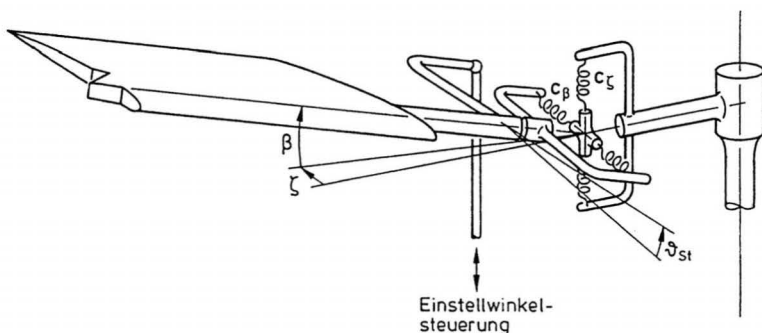


Bild 5.19 Blattersatzmodell für die gekoppelten Schlag-/Schwenkbewegungen

Bei der Herleitung der Masssenkraftmomente nach Kap. 2.4 können wie angedeutet nicht alle nichtlinearen Glieder vernachlässigt werden. Die sich hier zusätzlich ergebenden Coriolismomente tragen entscheidend zu den Kopplungen zwischen Schlag- und Schwenkbewegung bei.

$$\begin{aligned} M^{Tr\ddot{a}gh.} &= -J^{PP}\Omega^2\beta'' \\ N^{Tr\ddot{a}gh.} &= -J^{PP}\Omega^2\zeta'' \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} M^{Zentrif.} &= -J^{CP}\Omega^2\beta \\ N^{Zentrif.} &= -J^{CP}\Omega^2\zeta \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} M^{Coriolis} &= 2J^{PP}\Omega^2\zeta'\beta \\ N^{Coriolis} &= -2J^{PP}\Omega^2\beta'\zeta \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} M^{Gewicht} &= -S^P g \\ N^{Gewicht} &= S^P g \alpha_{Ro} \sin \psi \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die Definition von α_{Ro} entnehme man Bild 6.1. Für die Ersatzfedermomente ergibt sich

$$\begin{aligned} M^{Feder} &= -c_\beta \beta = -J^{PP} \bar{\omega}_\beta^{nr^2} \Omega_{nenn}^2 \beta \\ N^{Feder} &= -c_\zeta \zeta = -J^{PP} \bar{\omega}_\zeta^{nr^2} \Omega_{nenn}^2 \zeta \end{aligned} \quad (5.39)$$

wobei die dimensionslose Schwenksteifigkeit analog zu der im Schlagfreiheitsgrad definiert ist:

$$\bar{\omega}_\zeta^{nr} = \frac{\sqrt{c_\zeta / J^{PP}}}{\Omega_{nenn}} \quad (5.40)$$

Typische Eigenfrequenzverläufe sind in Bild 5.20 dargestellt. Liegt wie in den eingezeichneten Beispielen die Eigenfrequenz der Schwenkbewegung bei Nenndrehzahl unter 1Ω , spricht man von einem schwenkweichen, sonst von einem schwenksteifen Rotor.

Führt man auch für die Schwenkbewegung eine entsprechende Blattmassenkonstante ein

$$\gamma_\zeta = \frac{\frac{p}{2} C_{w0} I_{Bl} R^4}{J^{PP}} \quad (5.41)$$

erhält man mit den Luftkraftmomenten nach Kap. 2.5.2 bzw. 5.2.1 in diesem Fall ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} \underline{\chi}'' + \left[\text{diag } \gamma \underline{D}(\psi) + 2\underline{D}_0 \right] \underline{\chi}' + \left[\text{diag } \gamma \underline{K}(\psi) + \underline{K}_0 \right] \underline{\chi} + 2(e^I \cdot \underline{\chi}) \underline{O} \underline{\chi}' = \\ = \left[\text{diag } \gamma \underline{E}(\psi) + \underline{E}_g(\psi) \right] \underline{\vartheta} + \text{diag } \gamma \underline{F}(\psi) + \underline{F}_0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\text{mit } \underline{\chi} = \begin{bmatrix} \beta \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \underline{\vartheta} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_{St} \\ \delta \\ \alpha_{Ro} \end{bmatrix}, \quad \underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_\beta \\ \gamma_\xi \end{bmatrix}.$$

Die Matrizenelemente und Vektoren sind im Anhang A.7 als Gl. (A.28) bis (A.38) vollständig aufgelistet; die zugehörigen Verläufe der Koeffizienten über ψ finden sich in den Bildern A.6 und A.6. Die Matrix \underline{D}_0 wurde in die Gleichung aufgenommen, um im Schwenkfreiheitsgrad analog zu Gl. (4.35) den Einfluß von Strukturdämpfung oder von zusätzlichen Schwenkdämpfern beschreiben zu können. Dies erweist sich als besonders wichtig, da die Luftkraftdämpfung der Schwenkbewegung wesentlich kleiner ist als in den beiden anderen Blattfreiheitsgraden.

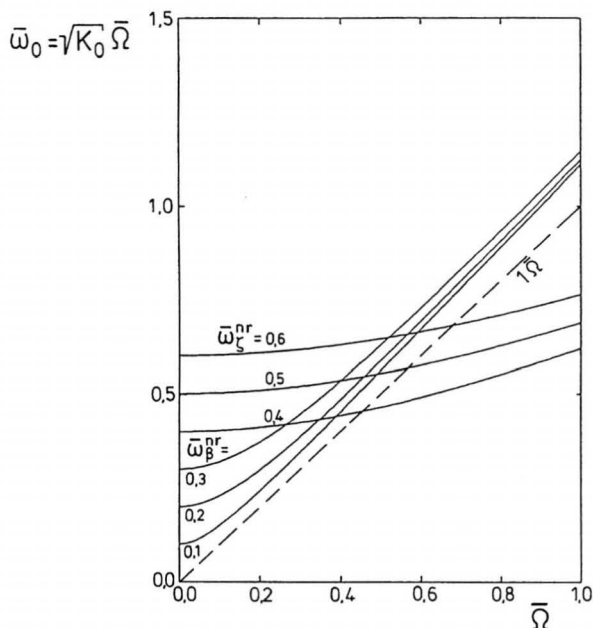


Bild 5.20 Beispiele für den Verlauf der Blatteigenfrequenzen im Vakuum

Neben den Untersuchungen anhand des nichtlinearen Gleichungssystems Gl. (5.42) wurden einige Rechnungen auch mit einer entsprechend linearisierten Version durchgeführt. Damit sollten insbesondere die mit dem modifizierten FLOQUET-Verfahren gewonnenen Ergebnisse überprüft werden (vgl. Kap. 5.2.6 , Bild 5.26). Die Linearisierung um die partikuläre Lösung $\underline{\chi}_{part}$ führt mit weiteren im Anhang A.7 beschriebenen Matrizen auf folgendes homogene Differentialgleichungssystem:

$$\underline{\chi}'' + \left[\text{diag } \underline{\gamma D}(\psi) + 2\underline{D}_Q(\psi) + 2\underline{D}_{=0} \right] \underline{\chi}' + \left[\text{diag } \underline{\gamma K}(\psi) + 2\underline{K}_Q(\psi) + \underline{K}_{=0} \right] \underline{\chi} = \underline{0} \quad (5.43)$$

5.2.3 Die statische Stabilität

Da Kopplungen zwischen Schlag- und Schwenkbewegung nur über Corioliskräfte entstehen, kann das Problem der statischen Stabilität mit $\underline{\chi}'' = \underline{\chi}' = \underline{0}$ für beide Freiheitsgrade isoliert betrachtet werden. Die Stabilitätsgrenze wird mit derselben Argumentation wie in Kap. 4.2 durch

$$\gamma_5 K_{22}(\psi) + K_{022} = 0 \quad (5.44)$$

beschrieben, womit sich für die erforderliche Anschlußsteifigkeit ergibt

$$\bar{\omega}_5^{nr} = \sqrt{-2\gamma_5 C_3^R \mu \cos \psi - J^{QP}/J^{PP}} \quad \bar{\Omega} \quad (5.45)$$

Zwar ist die stabilisierende Wirkung der Zentrifugalkräfte wegen $J^{QP} < J^{CP}$ hier schwächer als im Schlagfreiheitsgrad, da aber die Luftkräfte infolge der extrem kleinen Blattmassenkonstanten noch um ein Vielfaches geringer sind, besteht für den Schwenkfreiheitsgrad praktisch keine Divergenzgefahr (vgl. Gl. 4.14). Bild 5.21 zeigt die erforderliche Schwenksteifigkeit über dem Umlaufwinkel und Fortschrittsgrad.

Die kritischen Blattstellungen liegen bei $\psi = 135^\circ$ und 225° , wobei die Unterschiede zwischen vorlaufendem und rücklaufendem Blatt gering sind. Nur bei Verwendung realer Schwenkgelenke ohne jede rückstellende Wirkung könnte oberhalb von ca. $\mu = 10$ Divergenz auftreten. Aber schon Anschlußsteifigkeiten von $\bar{\omega}_5^{nr} = 0.01$ stellen statische Stabilität für alle Fortschrittsgrade sicher.

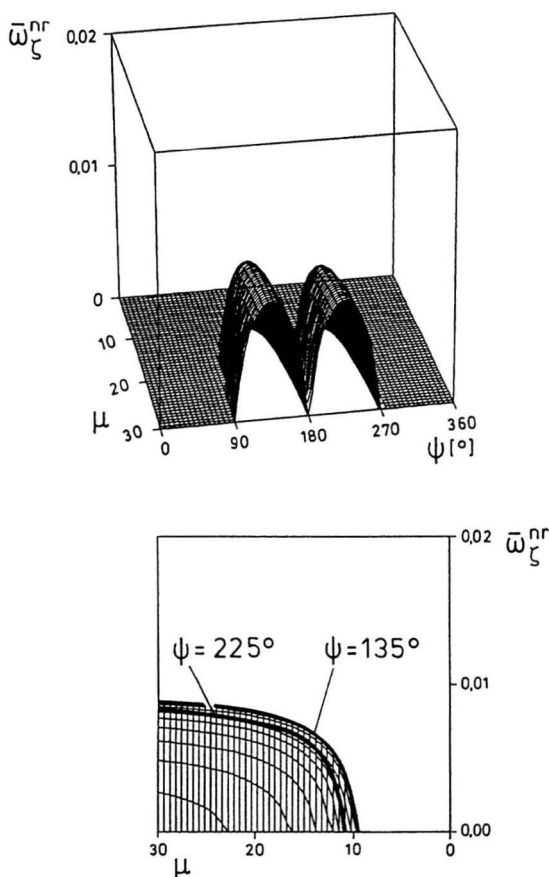


Bild 5.21 Erforderliche Anschlußsteifigkeit für statische Stabilität im Schwenkfreiheitsgrad

5.2.4 Die dynamische Stabilität des isolierten Schwenkfreiheitsgrades

Auch im Schwenkfreiheitsgrad erzeugen wechselnde Luftkräfte periodische Gleichungskoeffizienten; damit kann prinzipiell Parameterresonanz auftreten. Dies sei zunächst für den isolierten Schwenkfreiheitsgrad untersucht. Da die Nichtlinearitäten nur die Koppelterme betreffen, genügt es dabei, die zugehörige homogene Differentialgleichung zu betrachten.

Bild 5.22 zeigt Ergebnisse entsprechender Stabilitätsrechnungen. Um Effekte nachweisen zu können, müssen die Anschlußsteifigkeiten wie beim Divergenzproblem extrem klein gehalten werden. Für die technische Anwendung beim Stopp-Rotor kommen solche Werte sicher nicht in Frage.

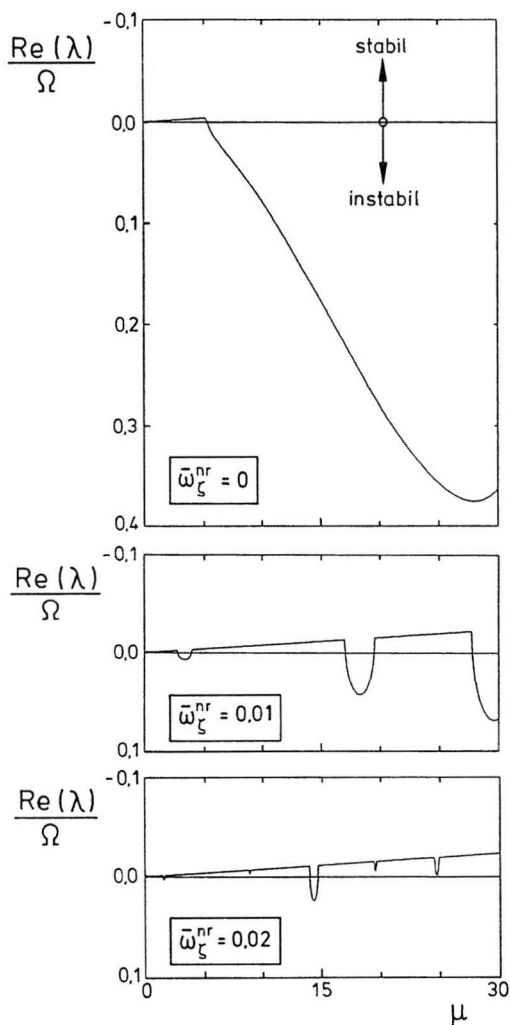


Bild 5.22 Stabilitätsverhalten der isolierten Schwenkbewegung für verschiedene Anschlußsteifigkeiten

Da für die dargestellten Rechnungen weder strukturelle noch künstliche Dämpfung angesetzt wurde, führen selbst schwache Parameterresonanzen (man beachte die gegenüber den übrigen Darstellungen geänderte Ordinatenenteilung) sofort zum Verlust der Stabilität. Durch die geringe bezogene Dämpfung bei Stillsetzungsbeginn wirkt sich eine Versteifung des Blattanschlusses zunächst sogar negativ aus, da durch die veränderten Eigenfrequenzen die erste Parameterresonanz dann jeweils schon bei niedrigeren Fortschrittsgraden auftritt. Bei realistischen Anschlußsteifigkeiten lassen sich jedoch keine Parameterresonanzen mehr nachweisen, und die Schwenkbewegung ist für alle μ stabil.

5.2.5 Die partikuläre Lösung

Soll das gekoppelte Differentialgleichungssystem betrachtet werden, muß zunächst wieder die partikuläre Lösung ermittelt werden. Damit dies mittels numerischer Integration in endlicher Zeit möglich ist, wird für die folgenden Rechnungen wie erwähnt eine konstante Dämpfung von $D_{0s} = 0.03$ hinzugefügt. Dies entspricht im Schwebeflug für $\bar{\omega}_T^{nr} = 0.5$ einem Dämpfungsgrad von $D^* = 0.044$, also einem Wert, der im Hinblick auf die Bodenresonanzstabilität eher noch zu niedrig angesetzt ist (vgl. [83]).

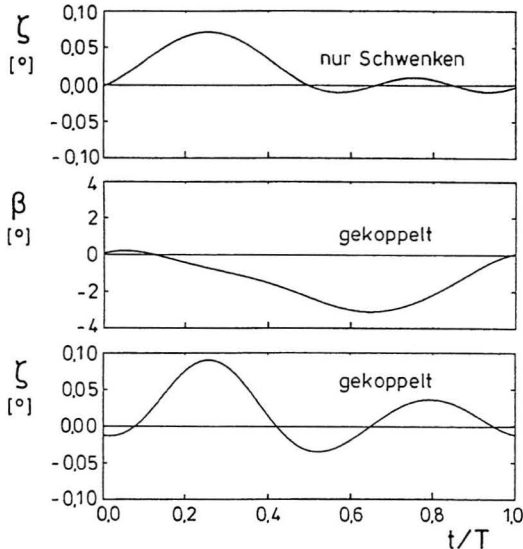


Bild 5.23 Periodische Lösungen für die isolierte Schwenkbewegung (oben) und das gekoppelte Schlag-/Schwenk-System (Mitte und unten) bei $\mu = 1$

Als Anregung wurden auf der rechten Seite nur das Blattgewicht (bei $\alpha_{Ro} = 0$) und das Schwenkluftkraftmoment berücksichtigt, alle Steuergrößen sind dagegen zu null gesetzt. Bild 5.23 vergleicht die Zeitverläufe der periodischen Lösung für den isolierten und den gekoppelten Fall bei $\mu = 1$. Deutlich ist der Einfluß der Schlagbewegung auf den Schwenkwinkelverlauf zu erkennen; dabei wird der 2Ω -Anteil durch die Kopplungen erheblich verstärkt.

5.2.6 Untersuchungen zur Stabilität der gekoppelten Bewegung

Selbst bei Berücksichtigung aller Widerstandsanteile nach Gl. (5.30) führen die Kopplungen zwischen Schlagen und Schwenken unter den normalen Betriebsbedingungen eines Hubschraubers nicht zu Instabilitäten. Die Verhältnisse im Schwebeflug werden z.B. in [37], [38] und [88] diskutiert. Bild 5.24 gibt die in [38] beschriebenen Ergebnisse für ein linearisiertes Blattmodell wieder. Danach können Instabilitäten nur auftreten, wenn Schlag- und Schwenkeigenfrequenz sich kaum unterscheiden und in der Nähe von 1.2Ω liegen.

Im abgebildeten Beispiel ergeben sich instabile Bereiche erst ab einem Kollektivwinkel von ca. $\vartheta_0 = 10^\circ$ (für $\vartheta_1 = 0$), was einem erheblichen Schub entspricht. In [88] sind diese Untersuchungen bis zu Fortschrittsgraden von $\mu = 0.4$ ausgedehnt, und auch dort zeigen sich Instabilitäten nur bei großen Rotorschüben. In ähnlicher Weise können die Ergebnisse aus [89] gedeutet werden, wo für ein komplizierteres nichtlineares Aerodynamikmodell Schlag-/Schwenk-Instabilitäten ebenfalls erst bei sehr großen kollektiven Blatteinstellwinkeln auftreten. Für den entlasteten Rotor besteht somit bezüglich dieser Art von selbsterregten Schwingungen keine Gefahr, selbst wenn beim Stillsetzen Frequenznachbarschaft von Schlag- und Schwenkeigenfrequenz gerade im Bereich von 1.2Ω entstehen sollte (vgl. dazu Bild 5.20).

Welchen Einfluß die durch Parameterresonanz verursachten Kopplungen auf das Stabilitätsverhalten nehmen, zeigen die in Bild 5.25 zusammengestellten Rechnungen. Untersucht wird die Stabilität der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen periodischen Lösung. Die linken drei Diagramme betreffen einen schwenkweichen ($\bar{\omega}_\xi'' = 0.5$), die rechten einen schwenksteifen Rotor ($\bar{\omega}_\xi'' = 1.0$). Die entkoppelten Rechnungen (jeweils oben) unterscheiden sich praktisch nicht, da die Realteile der Schwenkbewegungseigenwerte in beiden Fällen ohne Anzeichen von Parameterresonanz bei fast konstant $\text{Re}(\lambda)/\Omega = -0.04$ liegen.

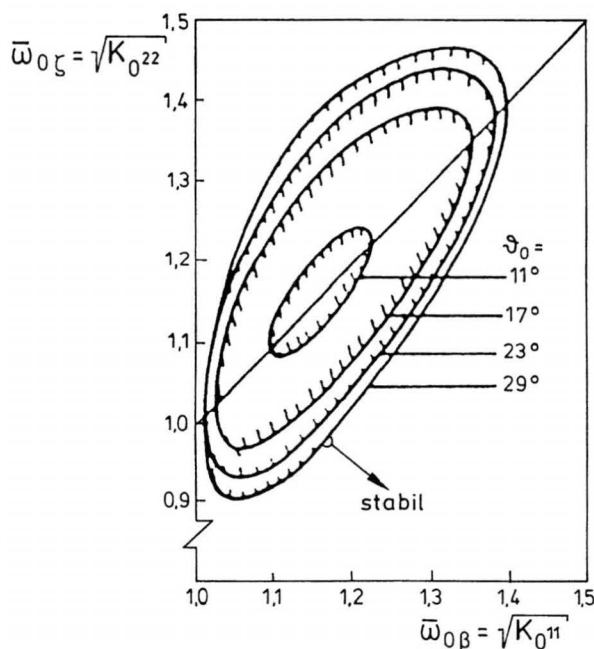


Bild 5.24 Stabilitätsgrenzen selbsteregter Schlag-/Schwenk-Schwingungen im Schwebeflug (nach [38])

Bei gekoppelter Betrachtung (jeweils unten) sind durchaus Wechselwirkungen zwischen Schlag- und Schwenkfreiheitsgrad zu erkennen. Zunächst ergibt sich in beiden Fällen für die Schlagbewegung ein zusätzliches Parameterresonanzgebiet im Bereich von $\mu = 2.3$. Für das schwenksteife Blatt zeigen sich dann oberhalb von $\mu = 6$ deutlichere Kopplungseffekte, wobei die für Parameterresonanz typischen Strukturen jedoch nur schwach ausgeprägt sind. Die gekoppelten Blattbewegungen bleiben im gesamten betrachteten Bereich stabil. Mit der weicheren Schwenkersatzfeder werden die Kopplungen bereits ab $\mu = 4$ wirksam, und ab $\mu = 6.9$ lassen sich die partikulären Lösungen durch numerische Integration nicht mehr ermitteln. Der Ausschnitt zeigt, daß sich in diesem Fall die Realteile der beiden Bewegungsanteile verbinden und weitere Parameterresonanzgebiete entstehen. Wegen der niedrigen Schlagsteifigkeit haben in diesen Bereichen die Schlagamplituden jedoch schon unrealistisch große Werte angenommen (vgl. Kap. 4.4.2).

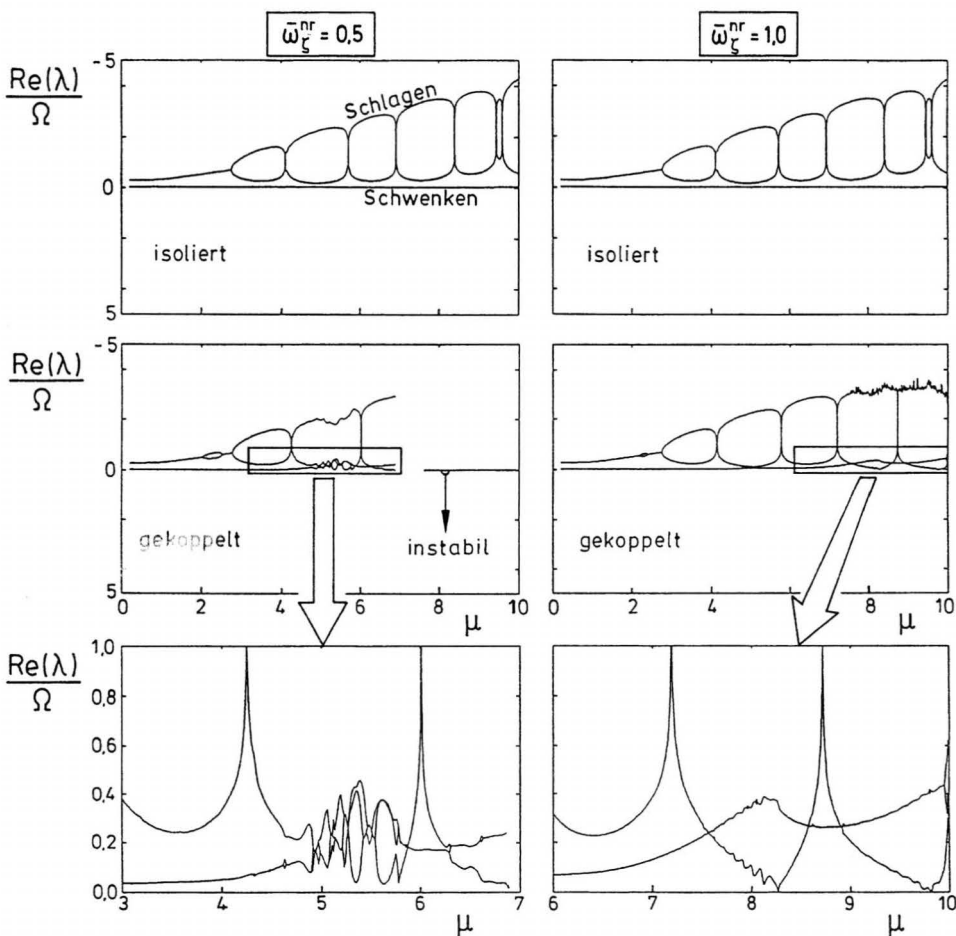


Bild 5.25 Stabilitätsverhalten der gekoppelten Schlag-/Schwenk-Bewegungen für einen schwenksteifen (oben) und einen schwenkweichen Rotor (unten)

Um sicherzustellen, daß die wenig regelmäßigen Dämpfungsverläufe nicht auf numerische Probleme der verwendeten Stabilitätsrechenverfahren zurückzuführen sind, wurden die Stabilitätswerte sowohl durch Anwendung der klassischen FLOQUET-Theorie auf das linearisierte Differentialgleichungssystem Gl. (5.43), als auch des modifizierten FLOQUET-Verfahrens auf die nichtlineare Gl. (5.42) ermittelt. In **Bild 5.26** werden die Ergebnisse miteinander verglichen.

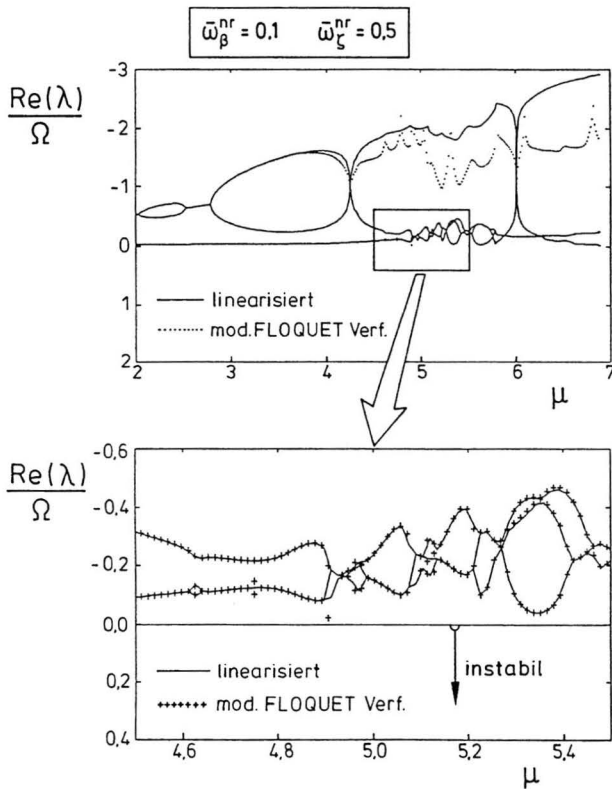


Bild 5.26 Vergleich von Ergebnissen zur Schlag-/Schwenk-Stabilität bei Anwendung der klassischen FLOQUET-Theorie auf das linearisierte oder des modifizierten FLOQUET-Verfahrens auf das nichtlineare Gleichungssystem

Für die Realteile in der Nähe der Stabilitätsgrenze ist die Übereinstimmung außerordentlich gut, so daß auf diesem Wege der Algorithmus für das modifizierte FLOQUET-Verfahren noch einmal verifiziert werden konnte. Nur für den jeweils kleinsten (und damit stabilsten) Realteil zeigen sich Abweichungen, die jedoch für die Lage der Stabilitätsgrenzen nicht von Bedeutung sind. Anhand der Kurvenverläufe läßt sich nicht entscheiden, welches Verfahren im vorliegenden Fall genauer arbeitet.

Zum Abschluß sei noch der Einfluß der Schwenkbewegung auf die Stabilitätskarte der Schlagbewegung für den schwenksteifen Blattanschluß dargestellt, siehe Bild 5.27. Die eingezeichneten Grenzkurven betreffen im gekoppelten Fall nicht den insgesamt am

wenigsten stabilen, sondern den größten der Schlagbewegung zuzuordnenden Realteil. Um die Rechenzeiten in praktikablen Grenzen zu halten, wurden mit dem dafür entwickelten Suchverfahren die Höhenlinien für die ausreichend gedämpften Fälle mit $\text{Re}(\lambda)/\Omega = -0.2$ ermittelt. Überall dort, wo die Bewegungsformen deutlich miteinander in Wechselwirkung treten, bereitet es dem Suchverfahren erhebliche Schwierigkeiten einer bestimmten Höhenlinie zu folgen. Der Vergleich der Verläufe zeigt jedoch, daß in den berechneten Bereichen die Schlagbewegung leicht destabilisiert wird (vgl. Bild 5.25 rechts oben und Mitte).

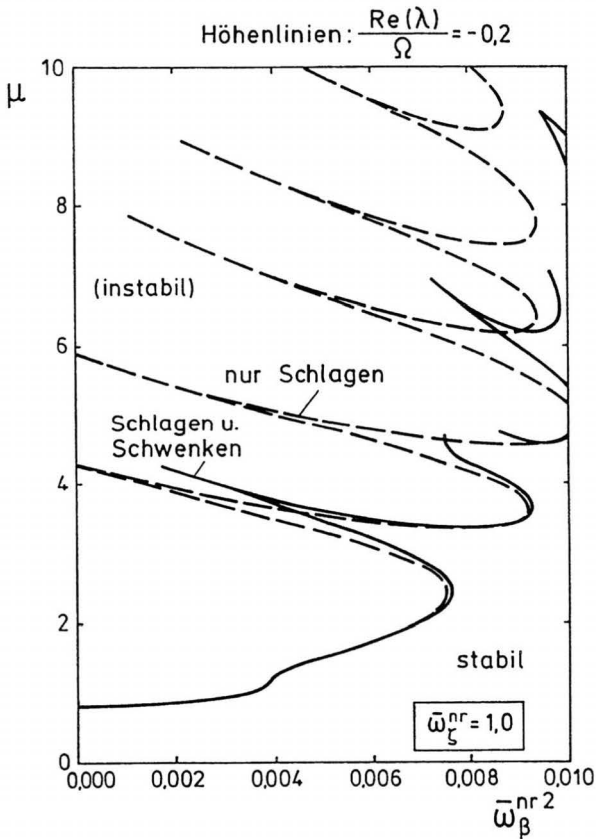


Bild 5.27 Einfluß des Schwenkfreiheitsgrades auf die Stabilitätskarte der Schlagbewegung

5.3 Numerische Simulationen und Stabilitätsrechnungen mit einem nichtlinearen Schlag-/Schwenk-/Torsionsmodell

Wie mehrfach erwähnt, mußten einige der angewendeten Vereinfachungen auf ihre Zulässigkeit überprüft werden. Zu diesem Zweck entstand neben den schon beschriebenen Modellen noch ein vollständig nichtlineares numerisches Blattmodell für die Freiheitsgrade Schlagen, Schwenken und Torsion. Die Massenkräfte wurden wie in Kap. 2.4 beschrieben unter Berücksichtigung aller kinematischen Nichtlinearitäten hergeleitet; bei der Formulierung der örtlichen Anströmkomponenten wurde entsprechend vorgegangen. Das Aerodynamikmodell beruht auf der Auswertung der im Anhang A.9, Bild A.7 dargestellten Beiwertverläufe (vgl. Kap. 2.5.3). Die Lösungen des daraus entstandenen nichtlinearen Differentialgleichungssystems wurden durch numerische Integration gewonnen. Die ermittelten Zeitverläufe und die teilweise zusätzlich berechneten Eigenwerte konnten dann jeweils mit den Ergebnissen der vereinfachten Modelle verglichen werden. Die durchgeführten, hier nicht weiter behandelten Rechnungen betrafen u.a.

- die Auswirkungen der kinematischen Nichtlinearitäten bei der Schlag- und der Torsionsbewegung,
- den Einfluß nichtlinearer Aerodynamik im Torsionsfreiheitsgrad,
- die Abhängigkeit der Stabilitätsgrenzen der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegungen von der Schwenkbewegung und
- die Auswirkungen von Rotordrehzahländerungen auf den Schwenkfreiheitsgrad.

Als Beispiel sei eine Rechnung zur Stabilität der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegungen angeführt. Das obere rechte Diagramm in Bild 5.13 zeigt, daß die Stabilitätsgrenze bei Verwendung des linearen, gekoppelten Modells für die dort angegebenen Anschlußsteifigkeiten bei $\mu = 4.2$ liegt. Integriert man die Zeitverläufe für genau diesen Fall mit dem hier beschriebenen nichtlinearen Modell unter zusätzlicher Berücksichtigung der Schwenkbewegung, ergeben sich die Verläufe nach Bild 5.28. Man erkennt, daß trotz unrealistisch großer Anfangsstörungen von 30° in allen Freiheitsgraden die Bewegungen gerade noch stabil bleiben, sich im Bereich der Rückanströmung jedoch starke Torsionsschwingungen ausbilden. Ferner wird deutlich, daß die Wechselwirkungen mit der Schwenkbewegung selbst bei großen Auslenkungen verhältnismäßig gering sind. Da Abreißeffekte und geometrische Nichtlinearitäten modelliert sind, können die Untersuchungen prinzipiell bis zu derart großen Amplituden ausgedehnt werden, auch wenn sie für die technische Gestaltung der Blätter sicher nicht mehr relevant sind.

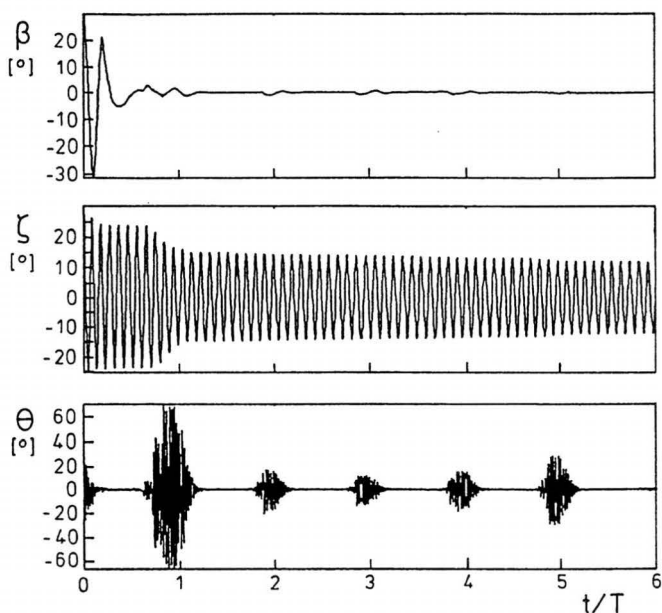


Bild 5.28 Numerisch integrierte Zeitverläufe der gekoppelten Schlag-/Schwenk-/Tosionsbewegungen nach Anfangsstörungen

Schließlich wurde das gekoppelte, nichtlineare Blattmodell noch für die Anwendung des modifizierten FLOQUET-Verfahrens aufbereitet. Die Berechnung der Realteilverläufe über dem Fortschrittsgrad erfordert damit jedoch so hohe Rechenzeiten, daß nur sehr wenige Vergleichsrechnungen durchgeführt werden konnten. Als Beispiel zeigt [Bild 5.29](#) die Dämpfungen im Schlagfreiheitsgrad für die homogene Differentialgleichung mit $\bar{\omega}_{\beta}^{nr} = 0.1$. Die Übereinstimmung zwischen dem analytischen linearen und dem numerischen nichtlinearen Modell ist bezüglich der Stabilität bei großen μ sehr gut; im Bereich kleiner Fortschrittsgrade ergeben sich jedoch verhältnismäßig große Abweichungen.

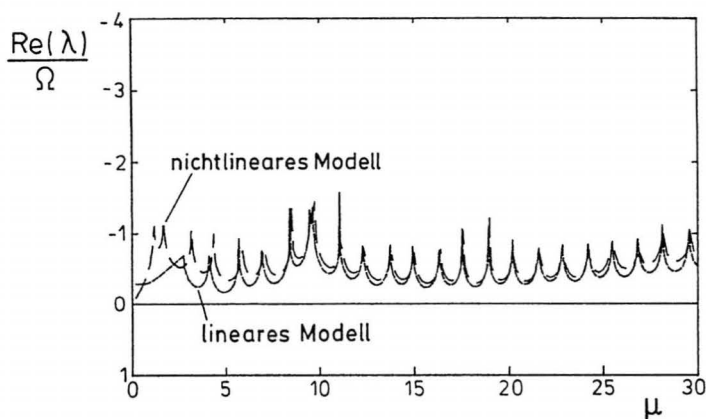


Bild 5.29 Vergleich von Ergebnissen zur Schlagstabilität für das lineare und das nichtlineare Blattmodell

6 Steuerung und Regelung der Rotorstillsetzung

Während bis hierher Stabilität und Antwortverhalten des einzelnen Blattes isoliert von den konkreten Betriebsbedingungen des Fluggerätes betrachtet wurden, ist im folgenden noch zu klären, welche Randbedingungen bei der Rotorstillsetzung aus flugmechanischer Sicht einzuhalten sind. Da sich die in der Literatur beschriebenen Untersuchungen zu Stopp-Rotor-Flugzeugen zumeist auf die Blattinstabilitäten konzentrieren, finden sich relativ wenige Angaben zu diesem Problemkreis. Neben einigen theoretischen Betrachtungen in [11], [16] und [32] finden sich Ergebnisse aus Windkanaluntersuchungen insbesondere in [17] und [22].

Grundgedanke ist in allen Fällen, den Rotor erst stillzusetzen, wenn die klassischen Steuerungselemente des Flugzeuges bei entsprechend hohen Staudrücken über ausreichend Steuerreserven verfügen, die auftretenden Rotorkräfte und -momente auszusteuern. Für die Minimierung der unerwünschten Rotorkomponenten ist allein die klassische (kollektive und zyklische) Blattverstellung über die Taumelscheibe vorgesehen. In [25] wird ausdrücklich auf das Problem der großen, niederfrequenten Schwankungsanteile in der Endphase des Stillsetzungsvorgangs hingewiesen. Erwartungsgemäß verschlechtert sich die Situation bei geringen Blattzahlen deutlich. Als Ausweg wird dort das möglichst schnelle Stillsetzen und die koordinierte, dynamische Ansteuerung der Flugzeugsteuerflächen erwogen.

6.1 Flugmechanische Randbedingungen während der Rotorentlastung und -stillsetzung

Wichtigste Voraussetzung für das gefahrlose Stillsetzen ist wie erwähnt, Stabilität und Steuerbarkeit in allen Phasen der Transition sicherzustellen, damit bei Ausfall wichtiger Brems- bzw. Antriebskomponenten der Vorgang unterbrochen und ggf. umgekehrt werden kann. Da es im folgenden vor allem um regelungstechnische Maßnahmen zur Beeinflussung der Blattbewegungen gehen soll, werden für die Entlastung und die anschließende Stillsetzung des Rotors vergleichsweise günstige Randbedingungen zugrunde gelegt.

Bild 6.1 zeigt die geometrischen Verhältnisse an einem Stopp-Rotor-Fluggerät mit zwei nebeneinander angeordneten Rotoren. Die Anordnung von Flügel und Rotor sei so gewählt, daß im rotorgetragenen Flug bei Transitionsgeschwindigkeit der Flügel gerade unter $\alpha_{FI} = 0$

angeströmt wird. Dabei setzt sich seine Anströmung vektoriell aus der Fluggeschwindigkeit V und dem Rotorabwind w_i zusammen. Entsprechend sei der Masteinbauwinkel des Rotors so abgestimmt, daß im flächengetragenen Zustand der entlastete Rotor rein tangential angeströmt wird. Dies ist sicher immer anzustreben, da so eine Anregung über den Rotor-durchfluß (d.h. durch den δ -Term auf der rechten Seite der Schlagdifferentialgleichung (4.8)) vermieden wird. Es werde ferner angenommen, daß sich der Anstellwinkel und damit der Auftrieb des Flügels durch das Höhenruder in gewünschter Weise einstellen läßt. Geht man weiter davon aus, daß die Steuerkapazität ausreicht, um auch vom Rotor verursachte Momente zu kompensieren (wobei die Roll- und Gierrmomente bei einem symmetrischen Fluggerät kein Problem darstellen), ist für den Rotor nur zu fordern, daß sich der Schub kontrolliert auf null reduzieren läßt. Dabei ist die Begrenzung der übrigen Rotorkräfte und -momente mit Rücksicht auf die auftretenden Belastungen natürlich von Vorteil. Die durch Widerstandskräfte der Blätter entstehenden x -Kräfte der Rotoren lassen sich durch den Triebwerksschub leicht ausgleichen, da für die weitere Beschleunigung nach der Konversion noch erhebliche Schubreserven zur Verfügung stehen müssen.

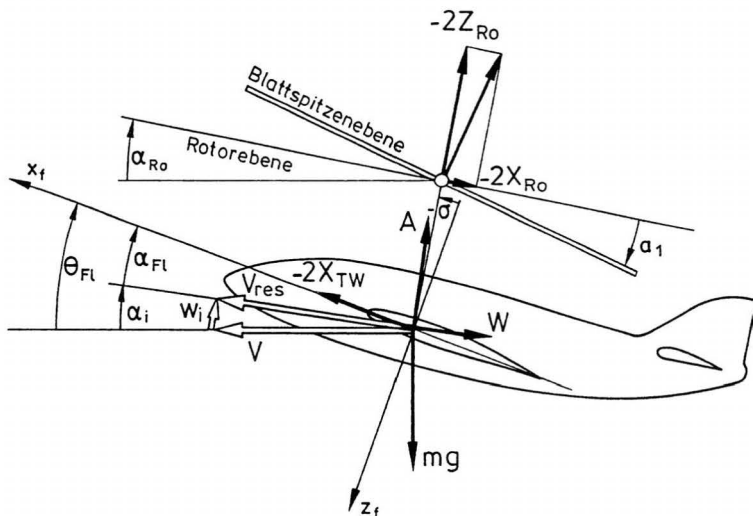


Bild 6.1 Anströmbedingungen und Kräfte an einem Stopp-Rotor-Flugzeug

Um einen Eindruck von den Betriebsbedingungen des Rotors während der Entlastungsphase zu vermitteln, werden im folgenden kurz die Kräftegleichgewichte für das Fluggerät aufgestellt und ihre Lösungen diskutiert. Vereinfachende Annahmen sind dabei:

- Auftrieb und Widerstand des gesamten Fluggerätes liegen senkrecht zu bzw. in der durch α_{Fl} beschriebenen Anströmrichtung, auch wenn nicht alle Flugzeugteile im Rotorabwind liegen und sich örtlich abweichende Anströmrichtungen ergeben.
- Der Rotorabwind ist auch bei belastetem Rotor klein gegenüber der Fluggeschwindigkeit, so daß $V_{res} \approx V$ gilt.
- Der Rotorabwind ist über der Rotorkreisscheibe konstant und wird nach der Strahltheorie aus der bekannten Näherung für den Schnellflug berechnet (vgl. [36]).
- Die Schub- und Widerstandskräfte sind klein gegenüber den Auftriebs- und Gewichtskräften.
- Die auftretenden Winkel erlauben die übliche Linearisierung der trigonometrischen Funktionen.
- Für den Zusammenhang zwischen Flügelauftrieb und -widerstand wird der übliche quadratische Ansatz verwendet.

Es gelten dann die folgenden Zusammenhänge:

$$w_i = \frac{-Z_{Ro}}{2\pi\rho R^2 V} \quad (6.1)$$

$$\alpha_{Fl} = \Theta_{Fl} - \alpha_i \approx \Theta_{Fl} - \frac{w_i}{V} \quad \alpha_{Ro} = \Theta_{Fl} + \sigma \quad (6.2)$$

$$\delta = \frac{\alpha_{Ro} V - w_i}{\Omega R} \quad \mu = \frac{V}{\Omega R} \quad (6.3)$$

$$W = \frac{\rho}{2} V^2 S_{Fl} (C_{W0} + k C_{A\alpha}^2 \alpha_{Fl}^2) \quad A = \frac{\rho}{2} V^2 S_{Fl} C_{A\alpha} \alpha_{Fl} \quad (6.4)$$

Die Kräftegleichgewichte im flugzeugfesten System lauten dann (für zwei Rotoren)

$$\begin{aligned} \sum Z = 0 &\approx \quad + 2Z_{Ro} - A \quad + mg \\ \sum X = 0 &\approx 2X_{Ro} + 2\sigma Z_{Ro} + \alpha_{Fl} A - W + 2X_{TW} - \Theta_{Fl} mg \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die geometrischen und aerodynamischen Parameter wurden entsprechend der in Kap.2.1 beschriebenen Referenzkonfiguration gewählt, die Daten finden sich im Anhang A.1. In den Diagrammen Bild 6.2 sind die Lösungen der Kräftegleichungen für die Transitions geschwindigkeit bei $\mu = 0.2$ dargestellt. Als unabhängige Größe wurde der Längslagewinkel

Θ_{FI} gewählt, der sich wie beschrieben über das Höhenruder frei einstellen lassen sollte. Bei $\Theta_{FI} = 5.6^\circ$ wird der Flügel gerade in seiner Nullauftriebsrichtung angeströmt und erzeugt keinen Auftrieb; bei $\Theta_{FI} = \alpha_{FI} = 16.3^\circ$ trägt allein der Flügel, der Rotor erzeugt keinen Schub mehr und somit wird die freie Anströmung nicht durch den Rotorabwind abgelenkt.

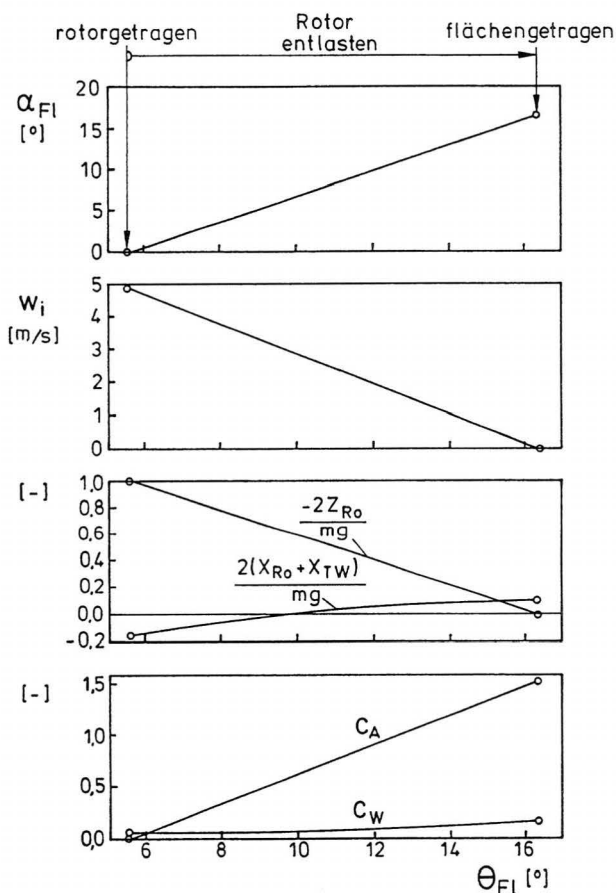


Bild 6.2 Flugmechanische Parameter während der Rotorentlastung

Der Betriebszustand des Rotors wird beschrieben durch die Verläufe von Rotorschub (bezogen auf das Flugzeuggewicht), Rotoranstellwinkel und induziertem Abwind bzw. Durchflußgrad. Ferner ergibt sich die Summe aus Rotor- x -Kraft und Triebwerksschub. Es wird deutlich, daß der zu Beginn stark nach vorne geneigte Rotorschub den Widerstand mehr als ausgleicht und sicher ausreicht, um - zunächst ohne zusätzlichen Triebwerksschub - die im Rotor auftretenden x -Kräfte zu überwinden.

Da die Flächenbelastung eines solchen Fluggerätes in Hinblick auf einen effizienten Schnellflug zu wählen ist, ergeben sich bei Transitions geschwindigkeit höhere Auftriebsbeiwerte als üblich. Diese lassen sich jedoch mit speziellen Hochauftriebshilfen problemlos realisieren, zumal entsprechende Klappensysteme an den Tragflächen einen weiteren entscheidenden Vorteil bieten. Mit ihnen läßt sich im Schwebeflug die abwärts gerichtete Luftkraftkomponente infolge der Anströmung des Flügels durch den Rotorabwind (hier ca. 13% des Gewichts) verringern, womit sich die Schwebefugleistungen verbessern bzw. die erforderlichen Rotorabmessungen reduzieren.

6.2 Die erforderlichen Steuereingaben zum Austrimmen des Flugzustandes

Es ist nun zu fragen, ob die beschriebenen Randbedingungen einen sinnvollen Betrieb des Rotors zulassen und wie dieser dafür zu steuern ist. Zunächst wird wieder die Entlastungsphase, anschließend der Stillsetzungsvorgang behandelt. Während für die Untersuchung der Blattbewegungen allein die Momentengleichungen zu lösen waren, muß zur Beschreibung des Rotorschubes zusätzlich die z -Kraft-Gleichung behandelt werden. Dabei wird zunächst die z -Kraft des einzelnen Blattes berechnet und aus dieser die Rotorkraft ermittelt. Die zur Vereinfachung getroffenen Annahmen sind in diesem Fall:

- Die z Rotorblätter sind in ihren aeromechanischen Eigenschaften identisch, d.h. sie laufen mit demselben Zeitverhalten in der selben Spur um.
- Für den Trimmzustand des Fluggerätes ist nur der Mittelwert des Rotorschubes relevant.
- Die Luftkräfte ergeben sich aus dem in Kap.2.5.2 dargestellten Blattmodell mit linearer Aerodynamik bei analytischer Berücksichtigung der Rückanströmung.

Analog zum Schlagmoment erhält man für die Blattluftkraft in z-Richtung

$$-Z_{Bl}^{Luft} = \frac{\rho}{2} C_{\alpha\alpha} I_{Bl} R \int_A^B \alpha_{eff}^R v_i^2 dx \quad (6.6)$$

$$= -\frac{\rho}{2} C_{\alpha\alpha} I_{Bl} R^3 \Omega^2 \left[C_3^R \beta' + (D_2^R \mu \cos \psi) \beta \right. \\ \left. - (D_4^R + D_3^R \mu \sin \psi) \vartheta_1 \right. \\ \left. - (D_3^R + D_2^R \mu \sin \psi) \vartheta_{St} \right. \\ \left. - D_2^R \delta \right] \quad (6.7)$$

Dabei sind für $\beta(\psi)$ und $\beta'(\psi)$ die durch numerische Integration der Schlagdifferentialgleichung gewonnenen partikulären Lösungen einzusetzen. Die Mittelwertbildung über einen Umlauf liefert schließlich

$$Z_{Ro} = \frac{n_{Bl}}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_{Bl}^{Luft} d\psi \quad (6.8)$$

Zur Ermittlung der Rotorkomponenten X_{Ro} und Y_{Ro} müßten, wie schon bei der Betrachtung der Schwenkbewegung, die Blattwiderstandskräfte nach Kap.5.2.1 modelliert werden. Diese Komponenten sind jedoch relativ klein, insbesondere gegenüber den Anteilen aus der Schubvektorneigung. Letztere ergibt sich bei niedrigen Fortschrittsgraden in guter Näherung aus den 1Ω -Schlagkoeffizienten a_1 und b_1 , welche die Neigung der Blattspitzenebene beschreiben. Daher werden diese Koeffizienten für den Ansatz

$$\beta = a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi - \dots \quad (6.9)$$

durch FOURIER-Analyse des Schlagwinkelverlaufs zusätzlich ermittelt. Für einen Rotor mit zentralem Schlaggelenk ohne Feder ergeben sich einfache analytische Ausdrücke der Form

$$a_1 = \dots + \vartheta_s \\ b_1 = \dots - \vartheta_c \quad (6.10)$$

d.h. die Richtung der resultierenden Rotorluftkraft (und damit das Verhältnis von X_{Ro} und Y_{Ro} zu Z_{Ro}) läßt sich über die zyklischen Steuerwinkel (vgl. Gl. (4.45)) in der gewünschten Weise beeinflussen.

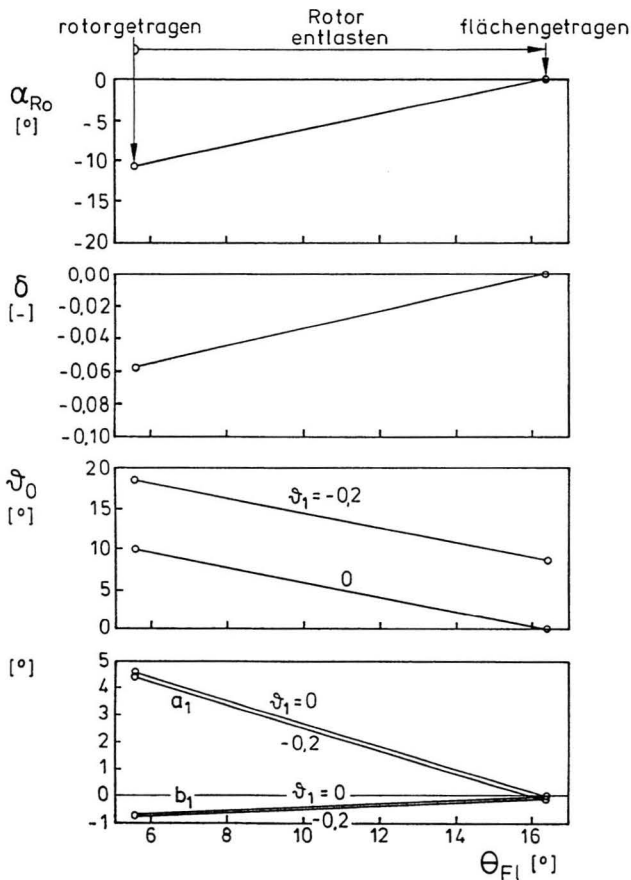


Bild 6.3 Rotortrimmwerte während der Entlastung

Wird nun der Rotorschub entsprechend der Vorgaben des vorangegangenen Kapitels ausgetrimmt, ergeben sich die in Bild 6.3 dargestellten Verläufe für den Kollektivsteuerwinkel ϑ_0 und die Schlagkoeffizienten a_1 , b_1 . Man erkennt sofort den Einfluß der Blattverwindung ϑ_1 ; für den selben Schub müssen bei der gewählten Verwindung von $\vartheta_1/R = -2.3^\circ/\text{m}$ an der Blattwurzel 8.6° zusätzlich eingesteuert werden. Die Blattspitzenebene ist im rotorgetragenen Zustand ungefähr um $a_1 = 4.5^\circ$ nach hinten und $-b_1 = 0.7^\circ$ nach rechts geneigt.

Diese Werte sinken während der Entlastung fast linear bis auf annähernd null. Schätzt man mit diesen Ergebnissen die Rotor- x -Kraft nach der Beziehung

$$X_{Ro} \approx a_1 Z_{Ro} \quad (6.11)$$

grob ab, ergibt sich ein Wert von $2X_{Ro}/(mg) = -0.08$ bei Beginn der Entlastung. Der Schubvektor müßte also durch die zyklische Steuerung noch weiter nach hinten geneigt werden, um den sich aus der x -Kraft-Gleichung ergebenden Wert von -0.16 zu erreichen. Man bedenke dabei, daß der Rotorschub $-Z_{Ro}$ infolge des großen negativen Masteinbauwinkels von $-\sigma = 16.3^\circ$ andernfalls eine erhebliche Vortriebskomponente erzeugen würde. Die hier beschriebenen Ergebnisse wurden mit dem auch zur Stabilitätsrechnung eingesetzten Rechenprogramm iterativ ermittelt, auch wenn sich bei dem niedrigen Fortschrittsgrad von $\mu = 0.2$ die partikuläre Lösung hätte problemlos durch harmonische Balance berechnen lassen, und die Zusammenhänge $a_0, a_1, b_1, Z_{Ro} = f(\vartheta_0)$ analytisch hätten beschrieben werden können.

6.3 Beeinflussung der Schlagbewegung durch aktive Steuerung

Die Betrachtungen des vorangegangenen Kapitels lassen sich formal auch auf den Betrieb des Rotors bei höheren Fortschrittsgraden - also die Stillsetzungsphase - anwenden. Die Ergebnisse spiegeln aber nicht die dann deutlich verändernden Eigenschaften des Rotors wieder. So ist es zwar noch möglich, den mittleren Rotorschub über den Kollektivsteuerwinkel auf null zu halten (siehe Kap.6.3.2.2), die dabei auftretenden insbesondere auch höherharmonischen Blattbewegungen lassen ein derartiges Vorgehen jedoch nicht als sinnvoll erscheinen. Auch verliert die konventionelle zyklische 1Ω -Blattsteuerung über die Taumelscheibe zunehmend an Wirkung, so daß die oben behandelten Näherungen zum Aussteuern der Schlagkoeffizienten völlig versagen.

Da es ferner vorteilhaft ist, den Stillsetzungsvorgang möglichst schnell durchzuführen, wird kein Pilot in der Lage sein, die komplizierten Steuerungsaufgaben während der Transitionsphase zu beherrschen. Schon aus diesem Grunde wird eine automatisierte Steuerung bzw. Regelung des Rotors notwendig werden. Im folgenden soll nun geklärt werden, welche Konzepte sich dafür anbieten und ob mit ihnen das Verhalten des Rotors beim Stillsetzen positiv beeinflußt werden kann.

Da es im folgenden aber nicht darum geht, bestimmte Steuerungs- und Regelungskomponenten einsatzreif auszulegen, wird auf die mathematische Formulierung eines Gütekriteriums verzichtet. Bezüglich Stabilität erfolgt die regelungstechnische Beeinflussung vereinfachend mit dem Ziel, den jeweils größten, die Schlagbewegung beschreibenden Realteil zu verringern. Die periodischen Lösungen gelten als *positiv beeinflusst*, wenn es gelingt, die Amplituden der Harmonischen der Schlagbewegung durch die aktive Steuerung abzusinken. Dies liegt nahe, weil die kritischen Beanspruchungen für die Rotorblätter sich aus der Schlagbiegung im Bereich der fiktiven Schlaggelenke ergeben. Die flugmechanischen Probleme werden primär durch große konstante und periodische Rotormomente verursacht, welche ebenfalls direkt von den Schlagkoeffizienten a_1, b_1 bzw. a_n, b_n abhängen. Speziellere Kriterien, wie die Bewegungen des gemeinsamen Schwerpunktes aller Blätter (relevant z.B. für das Problem der Luftresonanz) oder das Vibrationsniveau in der Zelle des Fluggerätes bleiben dagegen unberücksichtigt.

6.3.1 Die möglichen Regelungskonzepte

Die sogenannte aktive Steuerung beim Hubschrauber hat ein weites Anwendungsfeld und ist Gegenstand vielfältiger Forschungsaktivitäten. Bild 6.4 gibt einen Überblick über die wichtigsten Konzepte. Weitgehend erprobt und schon längere Zeit im Einsatz sind die sogenannten Stability Augmentation Systems (SAS), d.h. Flugregler, welche die flugmechanischen, also vergleichsweise niederfrequenten Bewegungsformen verbessern sollen. Bei diesen Regelkonzepten wird mit i.a. beschränkter Autorität in die Steuerpfade von Kollektiv-, Längs- und Quersteuer unterhalb der Taumelscheibe eingegriffen. Bei neueren Untersuchungen wird die Dynamik der Blattbewegungen in die Modellierung aufgenommen und versucht, durch verfeinerte Regelalgorithmen auch gekoppelte Rotor-Zellen-Eigenformen zu beeinflussen, siehe [100] und [103].

Die Auswirkungen auf die Schlagbewegung werden in [107] herausgestellt, wo ältere Untersuchungen zur Regelung von entlasteten Rotoren beschrieben sind. Dabei geht es u.a. um die mechanische und regelungstechnische Realisierung der in Kap. 4.3.2.3 beschriebenen Schlagwinkelrücksteuerung, aber auch um Konzepte mit Rückführung der Schlagkoeffizienten auf die zyklischen Steuer. Die Rotoren werden dort zwar von ihrer Auftriebs- und/oder Vortriebsfunktion entlastet, nicht aber stillgesetzt; so enden die Betrachtungen bei Fortschrittsgraden von ca. $\mu = 2$.

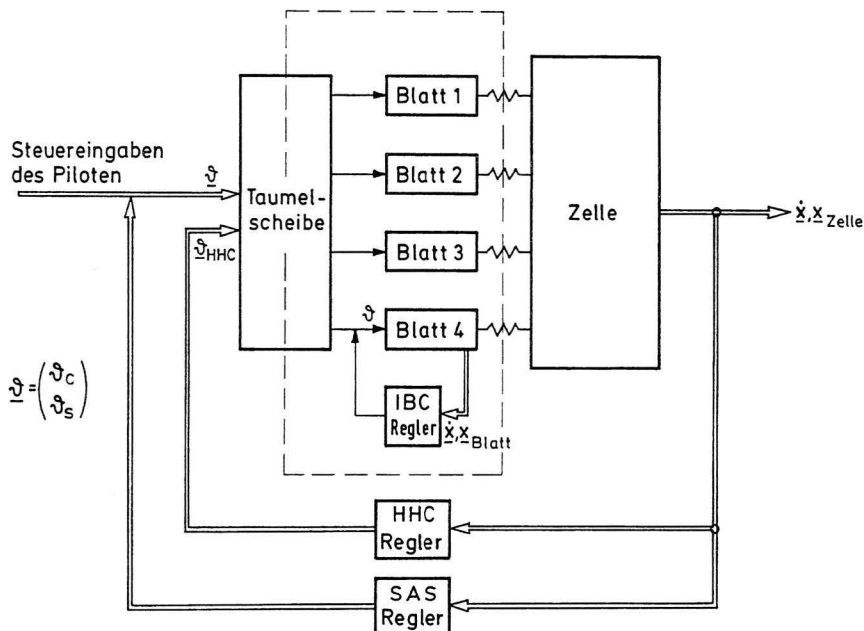


Bild 6.4 Struktur der wichtigsten Hubschrauber-Regelungssysteme

Neuere Untersuchungen konzentrieren sich auf die Vergrößerung der Bandbreite bis in den Bereich höherer Blatteigenfrequenzen. Es hat sich gezeigt, daß für Anwendungen wie Vibrationsminderung, Lärmreduzierung und Unterdrückung von gekoppelten Rotor-Zellen-Instabilitäten die optimalen Steuerwinkelverläufe höherharmonische Anteile enthalten. Dazu werden vor allem zwei Ansätze verfolgt:

- Bei Higher Harmonic Control (HHC) werden die Steuerverläufe aus Harmonischen der Rotordrehzahl (je nach Anwendung bis zu 6Ω) synthetisiert und in identischer Form (phasenverschoben) auf alle Blätter geschaltet, siehe z.B. [99] und [106]. Dabei besteht die Möglichkeit entweder unter- oder oberhalb der Taumelscheibe in das Steuerungssystem einzugreifen.
- Bei Individual Blade Control (IBC) wird jedes Blatt isoliert betrachtet. Es werden die Zustandsgrößen eines Blattes gemessen und aus ihnen der individuelle ggf. auch nichtharmonische Einstellwinkelverlauf für eben dieses Blatt generiert, siehe [101], [104]. Die Einsteuerung muß in diesem Fall oberhalb der Taumelscheibe, d.h. im drehenden System erfolgen.

Die Anwendung eines etwas erweiterten HHC-Konzepts wird in [98] vorgeschlagen. Dort wird anhand einer etwas gewagten Näherung für hochbelastete Rotoren im Schnellflug ($\mu = 0.5$) Schlaginstabilität vorausgesagt. Als Lösung wird ein Regelungskonzept beschrieben, bei dem in Abhängigkeit von den Schlagkoeffizienten a_1 und b_1 periodische Steuerwinkelverläufe erzeugt werden.

Untersuchungen zur Anwendung eines speziellen IBC-Konzeptes auf Hubschrauber im extremen Schnellflug sind in [105] beschrieben. Es werden dort u.a. Ergebnisse aus Windkanaluntersuchungen bei Fortschrittsgraden bis zu $\mu = 2.5$ dargestellt, jedoch ebenfalls nur für hochbelastete Rotoren.

Bei der Rotorstillsetzung unterliegen die Blätter wie mehrfach dargestellt sehr schnellen Änderungen der Anströmbedingungen. Außerdem bewegen sich die Blätter in der Endphase mit Geschwindigkeiten von der Größenordnung wie sie auch bei örtlichen Turbulenzen und Böenstörungen auftreten. Die einzelnen Blätter unterliegen daher während ihres Umlaufs ganz unterschiedlichen Betriebsbedingungen. Bedenkt man ferner, daß die Rotordrehzahl nicht konstant bleibt, erscheint das HHC-Konzept für die hier zu betrachtende Anwendung als weniger geeignet. Ein derartiger Regler müßte eine große Anzahl von sich ständig verändernden Harmonischen generieren, ohne jedoch auf die Blätter einzeln Einfluß nehmen zu können.

6.3.2 Beispielrechnungen für die Anwendung der Einzelblattsteuerung (Individual Blade Control)

Im folgenden wird eine Steuer- bzw. Regelstruktur betrachtet, die sich direkt aus der Form der Schlagdifferentialgleichung ableitet. Das Prinzip lehnt sich an IBC an, wobei jedoch die Zustandsgrößen nicht über konstante sondern periodische Koeffizienten zurückgeführt werden. Da, wie erläutert, die Schlagbewegung die entscheidenden Probleme bei der Stillsetzung verursacht, werden die übrigen Blattfreiheitsgrade nicht weiter berücksichtigt. Bild 6.5 zeigt die untersuchte Struktur anhand eines Signalflußdiagramms. Grundgedanke ist der Versuch, die schädlichen Periodizitäten der Schlagdifferentialgleichung durch das Regelsystem zu unterdrücken. Damit ließen sich sowohl jegliche Instabilitäten beseitigen (vgl. Kap. 4.3.1), als auch das Auftreten der zu großen Amplituden führenden Resonanzerscheinungen verhindern (vgl. Kap. 4.4.1).

- Erhöhung der konstanten Steifigkeit,
- Verringerung der periodischen Anteile und/oder
- Erhöhung der Dämpfung

der Differentialgleichung. Durch Anwendung der Transformation nach Gl. (4.16) läßt sich erklären, daß die Periodizität im Dämpfungsterm beim Übergang auf die MATHIEUSche Differentialgleichung zwar im Steifigkeitsterm auftritt, jedoch im 1Ω -Anteil mit um 90° gedrehter Phase (der sich zusätzlich ergebende höherharmonische Anteil hat eine nur sehr kleine Amplitude). Somit entscheidet die Phasenbeziehung zwischen $D(\psi)$ und $K(\psi)$ darüber, ob der periodische Dämpfungsterm sich positiv oder negativ auf die Stabilität auswirkt. Für den vorliegenden Fall der Schlagdifferentialgleichung zeigen die Untersuchungen, daß der periodische Anteil in $D(\psi)$ sowohl wegen seiner Phasenlage als auch in Bezug auf sein Anwachsen mit μ (nur linear, nicht aber quadratisch wie $K(\psi)$) unkritisch ist. Wie aus dem Signalflußdiagramm Bild 6.5 zu ersehen, wird also versucht, im Steifigkeitsterm die Periodizität zu unterdrücken, den konstanten Anteil durch G_β künstlich zu vergrößern und über G_β ggf. zusätzlich konstante Dämpfung zu erzeugen. Daß die Kompensation von $E_2(\psi)$ dabei von entscheidender Bedeutung ist, ergibt sich aus Kap. 4.3.2.3. Dort wurde gezeigt, welche Probleme eine direkte Schlagwinkelrücksteuerung der Form

$$\vartheta_{St} = -\beta \tan \delta_3 \quad (6.12)$$

verursacht. $E_2(\psi)$ stellt den Zusammenhang zwischen Steuerwinkel und Schlagmoment dar und ist eine periodische Funktion, die im Rückanströmgebiet ihr Vorzeichen wechselt (vgl. Bild 6.7 und im Anhang A.5 Bild A.1). Dadurch wirkt eine derartige Rückführung bei hohen Fortschrittsgraden sogar destabilisierend. Die Periodizitäten lassen sich also nur erfolgreich unterdrücken, wenn die periodische Übertragungscharakteristik $E_2(\psi)$ im Regler reziprok nachgebildet wird. Das ideale Regelgesetz lautet somit

$$\vartheta_{St} = \frac{1}{\gamma E_2(\psi)} \left[-G_{\beta'} \beta' + (\gamma K(\psi) - G_\beta) \beta \right] \quad (6.13)$$

Wird dieser Ansatz in die Differentialgleichung eingefügt, lassen sich Frequenz und Dämpfung der Schlagbewegung in gewünschter Weise beeinflussen. Die entscheidenden Fragen sind dabei:

- Durch welche Terme wird das System am effektivsten stabilisiert?
- Welche Fehler sind bei der Modellierung der periodischen Funktionen (insbesondere $E_2(\psi)$) zulässig, ohne daß sich die Regelwirkung unzulässig verschlechtert?
- Wie groß müssen die Stellgeschwindigkeiten mindestens sein, d.h. welche Anforderungen sind an die Aktuatoren zur Blattwinkelsteuerung zu stellen?

Bei den im folgenden dargestellten Stabilitätsrechnungen wurde von einem gelenkig angeschlossenen Blatt mit $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0$ ausgegangen, im übrigen gelten die Referenzdaten aus dem Anhang A.1. Im unregelmäßigen Fall ist die Schlagbewegung jenseits von $\mu = 2.2$ instabil. Die Diagramme in Bild 6.6 zeigen zunächst die Ergebnisse bei Verwendung der idealen Verläufe von $K(\psi)$ und $E_2(\psi)$. Sowohl die Unterdrückung der Periodizität im Federterm als auch die Erhöhung der konstanten Steifigkeit reichen jeweils allein aus, um Stabilität zu gewährleisten. Im ersten Fall (links) sind die Rückführkoeffizienten G_β und $G_{\beta'}$ gleich null. Es wird also lediglich $K(\psi)$ kompensiert. Man erkennt, daß Parameterresonanzen allein durch den periodischen Anteil von $D(\psi)$ verursacht werden. Die Steifigkeit infolge der Zentrifugalkräfte und der mit μ wachsende Dämpfungsmittelwert reichen jedoch aus, um Instabilitäten zu unterdrücken.

Im zweiten Fall (rechts) wurde nur über G_β zurückgeführt und dabei die Verstärkung so gewählt, daß die künstliche Steifigkeit einer mechanischen Feder von gerade $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.1$ entspricht. Dazu wird ganz formal die auch im weiteren verwendete fiktive Steifigkeit

$$\bar{\omega}_{fikt}^{nr} = \sqrt{\bar{\omega}_\beta^{nr^2} + \bar{\omega}_{G_\beta}^{nr^2}} \quad \text{mit} \quad \bar{\omega}_{G_\beta}^{nr} = \Omega \sqrt{G_\beta} \quad (6.14)$$

eingeführt. Es ergibt sich mit $G_\beta = 0.25\mu^2$ eine mit dem Fortschrittsgrad quadratisch wachsende Gegenkopplung. Der große Vorteil dabei ist, daß die Eigenschaften des Rotors im Schwebeflug unbeeinflusst bleiben. Die Rechnung liefert ein zum Fall mit vergleichbarer mechanischer Feder identisches Ergebnis. Gut zu erkennen ist im unteren Diagramm, wie die konstante Steifigkeit die bezogenen Eigenfrequenzen der Schlagbewegung erhöht.

Der Fall einer reinen $G_{\beta'}$ -Rückführung muß hier nicht weiter erörtert werden. Er entspricht dem in Kap. 4.3.2.3 beschriebenen Hinzufügen mechanischer Dämpfung. Die Realteile werden für alle Fortschrittsgrade zu kleineren, stabileren Werten verschoben, der Gradient über μ wird jedoch nicht beeinflusst. Um Instabilität zu verhindern müßte somit die Verstärkung linear mit μ erhöht werden.

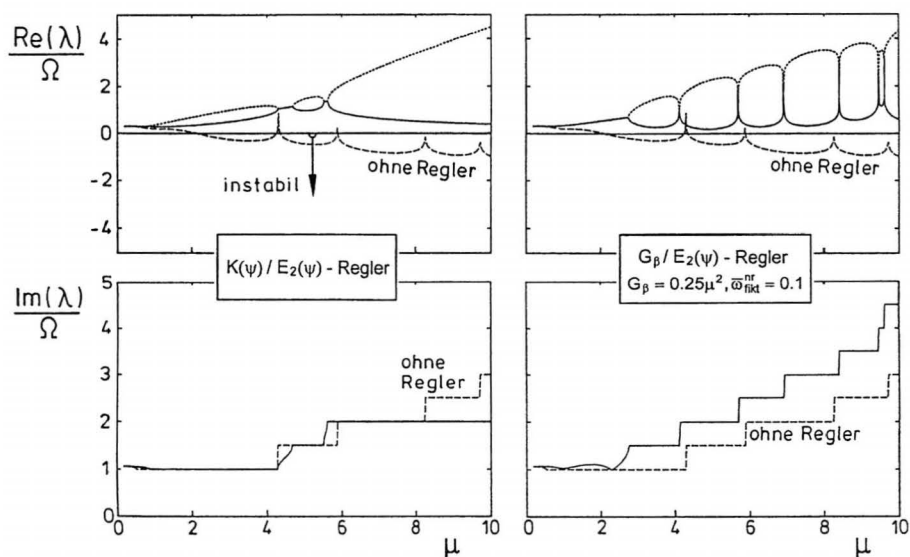


Bild 6.6 Stabilitätsrechnungen zum optimalen Regler ($\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0$)

Die Nachbildung der periodischen Koeffizienten stößt jedoch an technische Grenzen. Zum einen wird die mathematische Modellierung die physikalischen Eigenschaften der Blattbewegungen nur näherungsweise beschreiben können, selbst wenn man zu weitaus komplizierteren Modellen als dem hier verwendeten übergeht. Zum anderen erzeugen Nullstellen im $E_2(\psi)$ -Verlauf (in der Nähe von $\psi = 180^\circ$ und 360°) kurzzeitig Rückführverstärkungen von unendlich, was zu extrem großen und schnellen Steuerausschlägen führen würde.

Als nächster Schritt wurde daher ein vereinfachter Regler untersucht, bei dem nur der G_β -Zweig aktiv ist und bei dem die Steuercharakteristik $E_2(\psi)$ grob durch eine Rechteckfunktion angenähert wird. Bild 6.7 oben zeigt den Vergleich zwischen dem originalen Funktionsverlauf und der für den Regler verwendeten Approximation $\hat{E}_2(\psi)$ bei einem Fortschrittsgrad von $\mu = 3$. Die beiden Extremwerte der Rechteckfunktion entsprechen jeweils gerade 50% der Differenz zwischen den Extremwerten $E_2(\psi=90^\circ)$, $E_2(\psi=270^\circ)$ und dem konstanten Ausgangswert $E_2 = C_4$ für $\mu = 0$. Der Näherungsverlauf ist also wie der Originalverlauf nicht symmetrisch bezüglich null. Als Schaltzeitpunkte werden unabhängig vom Fortschrittsgrad $\psi = 180^\circ$ und 360° gewählt.

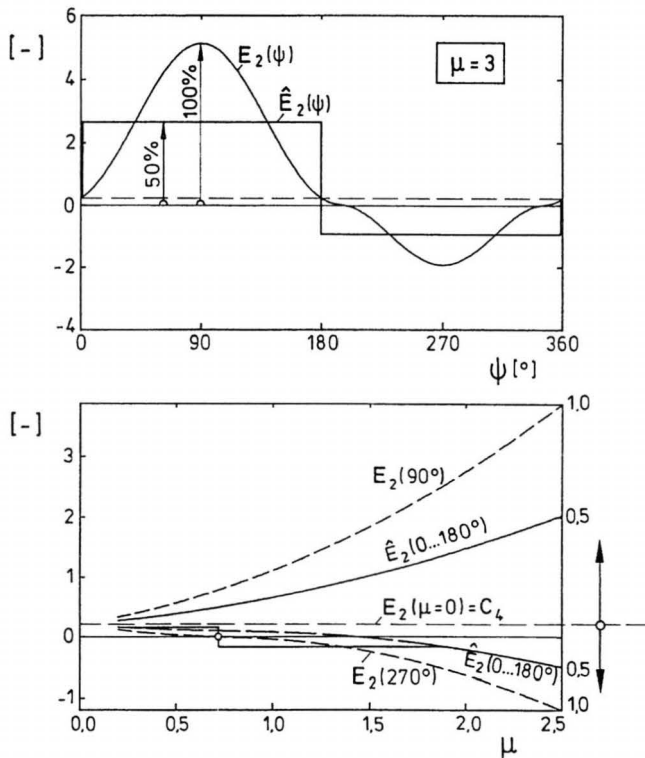


Bild 6.7 Approximation der Steuercharakteristik $E_2(\psi)$

In Bild 6.7 unten sind das Anwachsen der Extremwerte von $E_2(\psi)$ (gestrichelt) sowie die daraus abgeleiteten Schaltwerte dargestellt. Im Bereich um $\mu = 1.4$ läge danach der untere Schaltwert $\hat{E}_2(\psi = 180...360^\circ)$ jeweils für einen halben Rotorumlauf bei null. Daher wurden die Werte für die zweite Halbwelle entsprechend der unteren durchgezogenen Kurve modifiziert. Die Rückführverstärkungen bleiben damit auf unkritische Werte beschränkt.

Die Ergebnisse aus Stabilitätsrechnungen mit einem derartigen Regler zeigt Bild 6.8. Trotz der sehr vereinfachten Nachbildung zeigt sich der Regler erstaunlich effizient. Im Fall mit $G_\beta = 0.25\mu^2$ entsprechend $\bar{\omega}_{fkt}^{nr} = 0.1$ wird die Stabilitätsgrenze zwar berührt (Diagramm oben links), die Regelung vermag aber gerade auch im Bereich größerer Fortschrittsgrade die Schlagbewegung erheblich zu stabilisieren. Unterdrückt man dagegen den Nulldurchgang der zweiten Halbwelle von $\hat{E}_2(\psi)$ nicht wie oben erläutert, ergibt sich im Bereich von $\mu = 1.4$ erwartungsgemäß eine starke Instabilität (kurz gestrichelte Kurve).

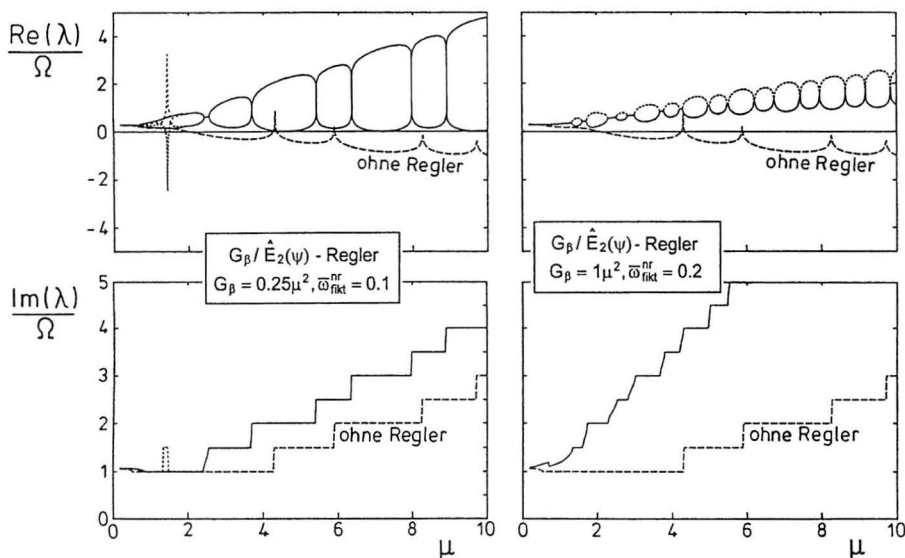


Bild 6.8 Stabilitätsrechnungen zum Regler mit approximierter Steuercharakteristik $\hat{E}_2(\psi)$ ($\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0$)

Durch Erhöhen der Rückführverstärkung auf $G_\beta = 1\mu^2$ entsprechend $\bar{\omega}_{fikt}^{\text{nr}} = 0.2$ erreicht man ausreichende Stabilität für alle Fortschrittsgrade. Weitere Rechnungen haben ergeben, daß die Umschaltzeitpunkte völlig unkritisch sind. Erst bei Phasenfehlern von mehr als 20° verschlechtert sich die Regelwirkung erkennbar. Demgegenüber reagiert ein Regler mit exakt nachgebildeter Steuercharakteristik extrem empfindlich auf wenige Grad Phasennacheilung. Die $E_2(\psi)$ -Funktionen von Strecke und Regler lassen sich dann nicht mehr exakt gegeneinander kürzen, sondern verursachen scharfe Polstellen im Signalpfad.

Wie schon erwähnt sind aber vor allem auch die von einem Regler mit genauer $E_2(\psi)$ -Nachbildung kommandierten Stellausschläge völlig unrealistisch. In **Bild 6.9** sind Zeitverläufe aus Simulationen bei $\mu = 2.5$ dargestellt; es ist jeweils nur die β -Rückführung mit $G_\beta = 1$ entsprechend $\bar{\omega}_{fikt}^{\text{nr}} = 0.08$ aktiv. Die Diagramme zeigen die Reaktion auf eine Schlagwinkelstörung von $\beta = 0.1^\circ$ im ungeregelten bzw. $\beta = 1^\circ$ im geregelten Fall. Verglichen werden die Rechnungen mit exakter $E_2(\psi)$ -Funktion, mit approximiertem Verlauf und mit zusätzlicher Stellgeschwindigkeitsbegrenzung.

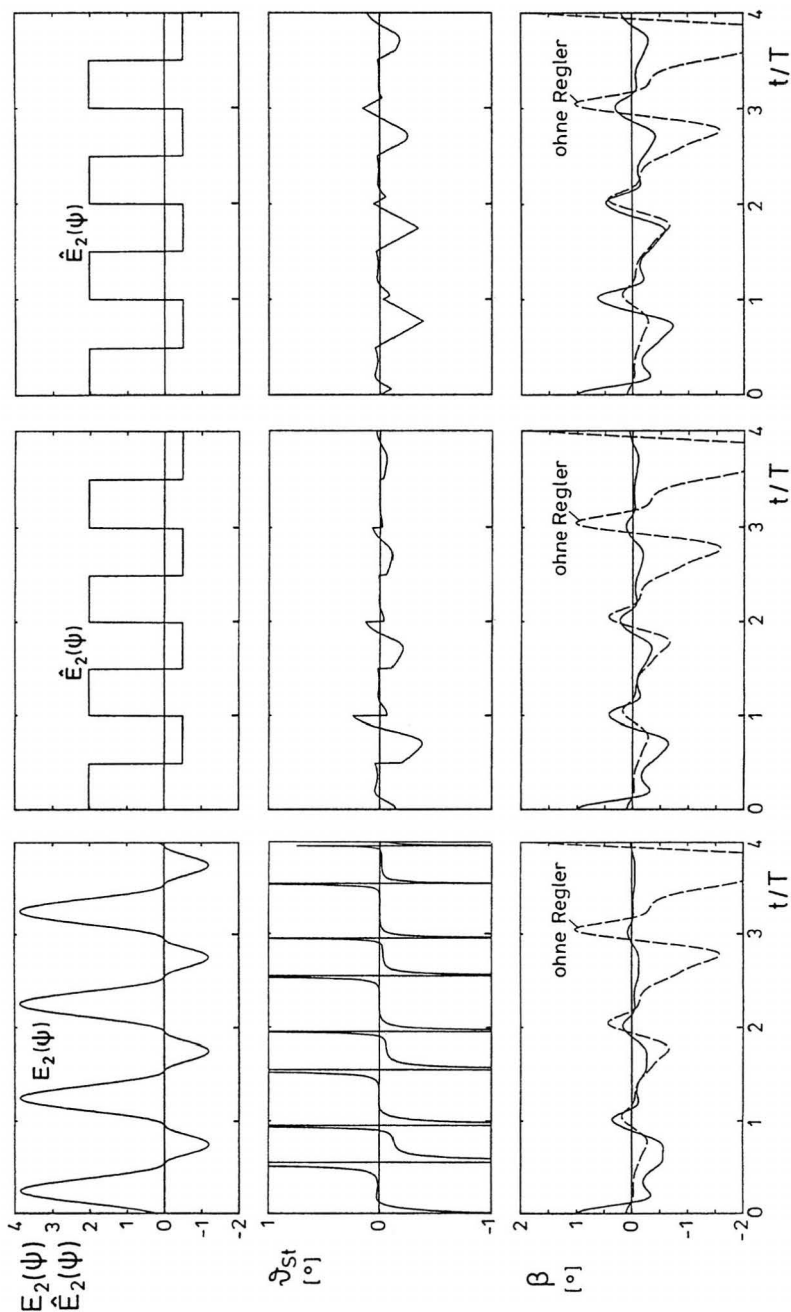


Bild 6.9 Simulationen zur künstlichen Stabilisierung der Schlagbewegung ($\mu = 2.5$, $\bar{\omega}_\beta^{\text{nr}} = 0$, $G_\beta = 1$, $\bar{\omega}_{\text{fkt}}^{\text{nr}} = 0.08$)

Im ersten Fall verursachen die Nullstellen in $E_2(\psi)$ (sie entsprechen Polstellen in der Rückführverstärkung) extreme Ausschläge im Blatteinstellwinkel (Diagramme links), und die dazu erforderlichen Stellgeschwindigkeiten liegen jenseits jeder Realisierbarkeit. Die Regelwirkung ist jedoch sehr gut; die bezogene Dämpfung der Schlagbewegung steigt von $\text{Re}(\lambda)/\Omega = 0.14$ (instabil, ungeregelt) auf $\text{Re}(\lambda)/\Omega = -0.20$. Aber schon bei Begrenzung der Einstellgeschwindigkeiten auf $\dot{\psi}_{St}^{\max} = \pm 100^\circ/\text{s}$ ist eine deutliche Verschlechterung des Regelverhaltens festzustellen (nicht dargestellt).

Mit dem $\hat{E}_2(\psi)$ -Regler erreicht man im vorliegenden Beispiel noch eine Dämpfung von $\text{Re}(\lambda)/\Omega = -0.10$, wobei sich Stellgeschwindigkeiten von $\dot{\psi}_{St} = -\infty \dots 2^\circ/\text{s}$ ergeben (Mitte). Für diesen Regler verschlechtern sich die Resultate erst bei sehr kleinen zulässigen Stellgeschwindigkeiten; mit $\dot{\psi}_{St}^{\max} = \pm 1^\circ/\text{s}$ beträgt die erzielte Dämpfung noch $\text{Re}(\lambda)/\Omega = -0.04$. Dies zeigt, daß die erforderlichen Stellgeschwindigkeiten für diesen Fall technisch leicht zu realisieren sind (Diagramme rechts).

6.3.2.2 Schubregelung und Amplitudenbegrenzung

Wie schon bei den regelungstechnischen Maßnahmen zur künstlichen Stabilisierung, erweist es sich auch zur Verbesserung des Antwortverhaltens als besonders effektiv, durch die genaue Nachbildung der Steuerfunktion $E_2(\psi)$ einen linearen Durchgriff von $\dot{\psi}_{St}$ auf β'' zu schaffen. Damit ließe sich z.B. die Anregung durch den (konstanten) Gewichtsterm F_0 auf der rechten Seite vollständig unterdrücken.

Die Möglichkeit, linear auf das Schlagmoment Einfluß zu nehmen, besitzt darüber hinaus einen weiteren entscheidenden Vorteil. Da das Schlagmoment und die Luftkraft des Blattes in z -Richtung in direktem Zusammenhang stehen (vgl. Bild 2.10 und Gl. (6.6)), sind die Steuercharakteristiken in beiden Fällen sehr ähnlich. Somit sollte eine Vorsteuerung über $[\gamma E_2(\psi)]^{-1}$ auch eine effektive Regelung des Rotorschubes ermöglichen. Eine dahingehend erweiterte Reglerstruktur zeigt Bild 6.10. Die Rückführung der Schlagbewegungszustandsgrößen wird ergänzt durch die Rückführung des Schubmittelwertes. Der Trimmregler im Vorwärtszweig erzeugt aus der aktuellen Schubdifferenz und weiteren Betriebsparametern (wie z.B. Rotordrehzahl, Fortschrittsgrad) Vorsteuersignale, die den Einfluß der rechten Seite bestmöglich unterdrücken und damit die Antwortamplituden begrenzen sollen.

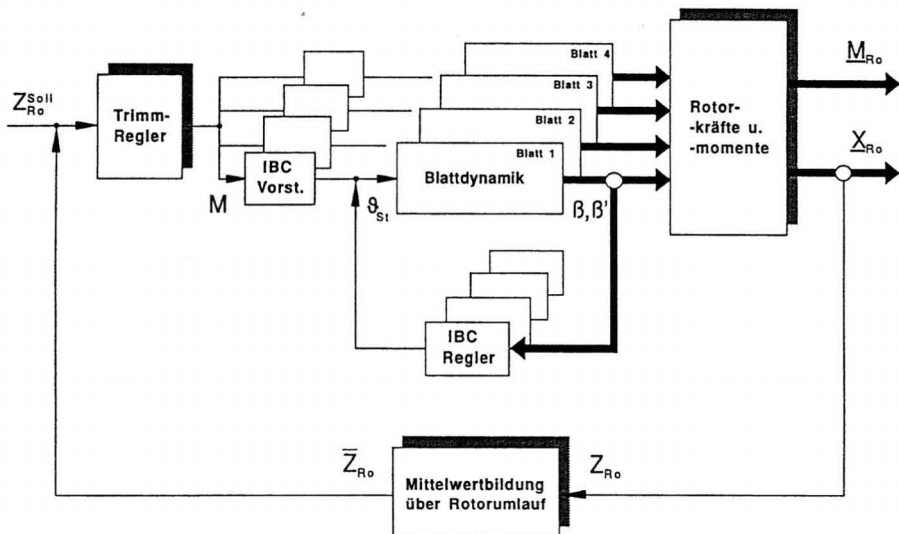


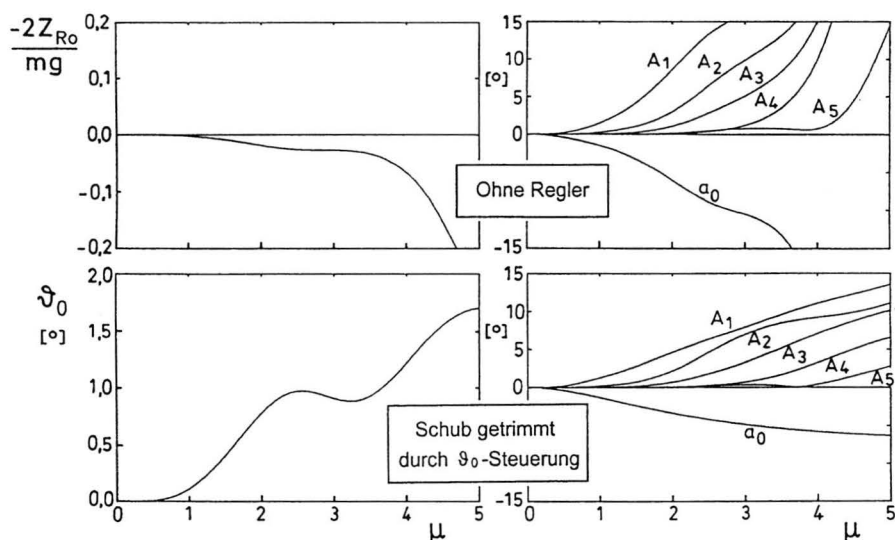
Bild 6.10 Reglerstruktur zur Schubregelung und Amplitudenbegrenzung

Im folgenden werden anhand der periodischen partikulären Lösungen einige einfache Vorsteuerkonzepte auf ihre Wirksamkeit untersucht. Auf der rechten Seite wurde nur der Gewichtsterm F_0 angesetzt. Anregungen über ϑ_1 können im Prinzip analog behandelt werden, wobei jedoch zusätzlich der Koeffizient $E_1(\psi)$ zu berücksichtigen ist. Der Einfluß von δ ist bei kleinen Schüben, annähernd tangentialer Rotoranströmung und hohen Flugeschwindigkeiten grundsätzlich sehr klein; außerdem stellt der aus dem mittleren Schub berechnete, über der Rotorkreisscheibe als konstant angenommene Abwind für sehr kleine Rotordrehzahlen eine nur ungenaue Näherung dar.

Die in Bild 6.11 dargestellten Rechnungen beziehen sich auf den stabilen Referenzfall mit $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.1$. Die obersten Diagramme zeigen zum Vergleich den ungeregelten Fall. Rechts dargestellt sind (analog zu Kap. 4.4.2) der Mittelwert a_0 und die Amplituden der ersten fünf Harmonischen $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ des stationären Schlagwinkelverlaufs. Wie aus Kap. 4.4.2 bekannt, wachsen die Amplituden schon bei Fortschrittsgraden ab $\mu = 1$ auf technisch völlig unzulässige Werte an. Der linke Teil zeigt den bezogenen mittleren Rotor Schub; er liegt bis $\mu = 3$ noch unter 3% des Flugzeuggewichts und bleibt damit flugmechanisch leicht beherrschbar. Bei größeren Fortschrittsgraden wird die Notwendigkeit einer Schubregelung jedoch offensichtlich.

Bei der zweiten Rechnung wurde in konventioneller Weise der Rotorschub über den Kollektivwinkel ϑ_0 zu null getrimmt; die Nullschubbedingung läßt sich schon mit kleinen Steuereinkeln erfüllen. Der positive Einfluß auf die Antwortamplituden ist deutlich zu erkennen, reicht aber nicht aus, um die Schlagwinkel auf technisch akzeptable Werte zu begrenzen. Berücksichtigt man, daß sich durch den Vorzeichenwechsel in $E_2(\psi)$ auch die Zuordnung von Einstellwinkel zu Blattauftrieb umkehrt, wird verständlich, warum ein derartiger Regler nicht sonderlich effektiv arbeitet.

Sobald man in den Vorwärtszweig als Faktor den Kehrwert der Steuercharakteristik $1/E_2(\psi)$ aufnimmt, verringern sich die Amplituden um ungefähr die Hälfte gegenüber dem Fall mit reiner ϑ_0 -Regelung. Da sich die Koeffizienten der Schlagmomentgleichung (2.41) und der Gleichung (6.7) der Blattluftkräfte in z -Richtung jedoch etwas unterscheiden, wird mit der Unterdrückung der Blattkräfte (bzw. des Rotorschubes) nicht gleichzeitig auch eine ideale Schlagwinkelbegrenzung erreicht. Vor allem verhindert das durch den zunehmenden Einfluß des Blattgewichtes verursachte Durchhängen der Blätter ($a_0 < 0$) die optimale rein tangentiale Anströmung. Im dargestellten dritten Fall wurde statt der optimalen Nachbildung die im letzten Kapitel beschriebene $\hat{E}_2(\psi)$ -Näherung verwendet. Das Ergebnis ist nur wenig besser als ohne diese Vorsteuerung und zeigt, daß die Approximation durch eine einfache Rechteckfunktion in diesem Fall nicht den erhofften Erfolg bringt.



(Fortsetzung)

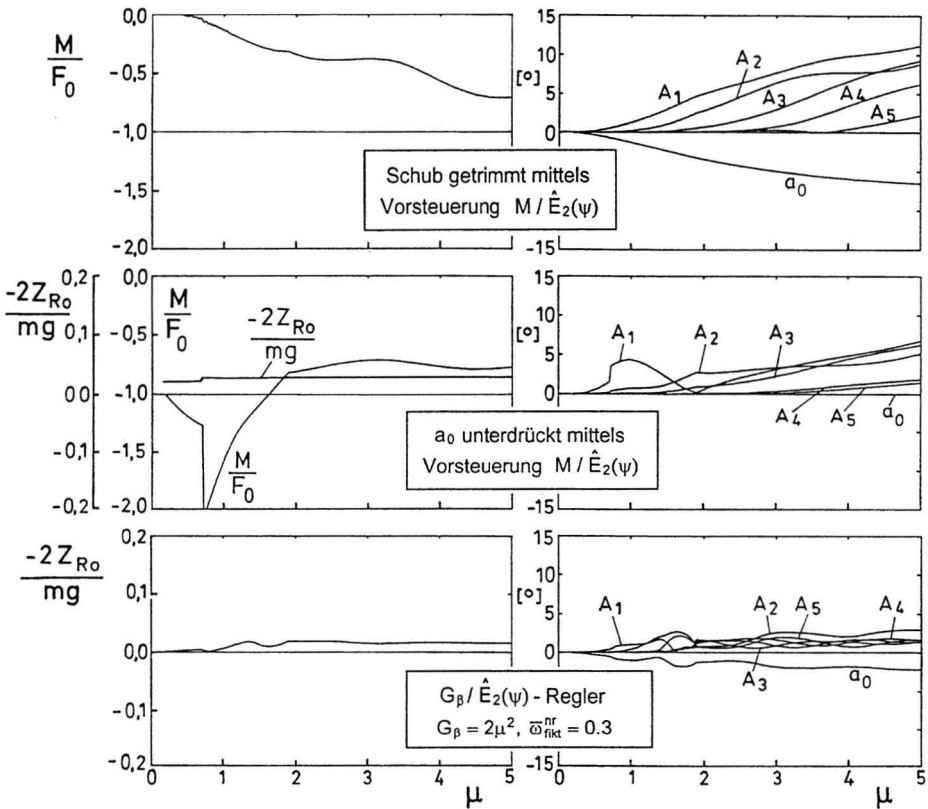


Bild 6.11 Einfluß verschiedener Vorsteuer- und Regelungskonzepte auf das stationäre Antwortverhalten

Dagegen erweist sich eine andere Strategie als günstiger. Setzt man die Vorsteuerung dazu ein, über das Erzeugen entsprechender Luftkraftmomente den F_0 -Term zu kompensieren, schaltet man jede Anregung der Schlagdifferentialgleichung aus und erhält die triviale partikuläre Lösung $\beta = 0$. Das konstante Eingangssignal M am Vorsteuereneingang muß dazu gerade der Bedingung $M/F_0 = -1$ genügen. Durch die zum Ausgleich der Gewichtskräfte nach oben gerichteten Luftkräfte am Blatt produziert der Rotor zwar einen kleinen Restschub, dieser bleibt jedoch sogar immer kleiner als die Summe der Blattgewichte, da sich die radialen Verteilungen von Luft- und Massenkräften unterscheiden.

Bei der im Bild dargestellten Rechnung (vierter Fall) wurde wieder die $\hat{E}_2(\psi)$ -Näherung verwendet. Als Kriterium für die vollständige Kompensation des Gewichtes wurde $a_0 = 0$ gewählt. Die dafür jeweils erforderlichen Eingangssignale liegen nun nicht mehr exakt bei $M/F_0 = -1$, sondern zeigen den im linken Diagramm abgebildeten Verlauf. Der bezogene Rotorschub liegt fast konstant bei 2.5% (entsprechend 92% der Blattgewichte) und stellt in dieser Größenordnung sicher kein Problem für den Transitionsvorgang dar. Die Schlagamplituden sinken noch einmal deutlich ab, wenn auch gerade die 2. und 3. Harmonische noch unerwünscht hohe Werte annehmen.

Die letzte Rechnung in Bild 6.11 betrifft das schon in Kap. 6.3.2.1 behandelte System mit Gegenkopplung der Schlagbewegungszustandsgrößen. Dargestellt ist der Fall mit einfacher Schlagwinkelrückführung über $G_\beta = 2\mu^2$ entsprechend $\bar{\omega}_{fikt}^{nr} = 0.3$ bei approximierter Steuercharakteristik $\hat{E}_2(\psi)$. Diese Regelung, die sich auch bei den Betrachtungen zur Stabilisierung als effizient erwiesen hat (vgl. Bild 6.8), zeigt die beste Wirkung. Die Schlagwinkelamplituden werden erfolgreich reduziert und der bezogene Rotorschub liegt sogar immer unter 2%. Durch die β -Rückführung wird das Durchhängen der Blätter verringert; es werden jedoch keine unnötig großen, Rotorschub verursachenden Luftkräfte erzeugt, um exakt $a_0 = 0$ zu erzwingen. Wegen der verhältnismäßig großen Verstärkung und der nur groben $\hat{E}_2(\psi)$ -Näherung besteht eine gewisse Tendenz, die höheren Harmonischen weniger gut zu unterdrücken.

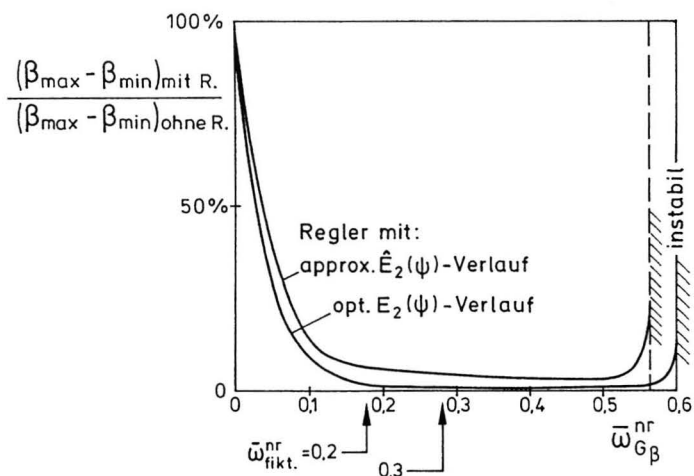


Bild 6.12 Amplitudenabsenkung in Abhängigkeit von der künstlichen Steifigkeit ($\mu = 5$, $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.1$, rechte Seite: F_0)

Noch deutlicher wird die Wirksamkeit der letzten Variante anhand der Darstellung in Bild 6.12. Aufgetragen ist dort die relative Absenkung der maximalen Schlagwinkelausschläge über dem Verstärkungsfaktor $\bar{\omega}_{G_\beta}'' = \Omega \sqrt{G_\beta}$ für den Fortschrittsgrad $\mu = 5$. Man erkennt, daß bis etwa $\bar{\omega}_{G_\beta}'' = 0.2$ die Auslenkungen mit wachsender Verstärkung stark zurückgehen. Eine weitere Erhöhung von G_β hat nur noch wenig Einfluß auf die Maximalwerte, es ändert sich jedoch die harmonische Zusammensetzung bis die höherfrequenten Anteile derart anwachsen, daß die Schlagbewegung sogar instabil wird. Das Bild zeigt ferner, daß der $\hat{E}_2(\psi)$ -Regler die Auslenkungen bestenfalls auf 3.5% des unregulierten Falls senken kann, während der optimale $E_2(\psi)$ -Regler 0.6% erreicht.

Es bleibt festzuhalten, daß die Schubregelung quasi als Nebenprodukt der Amplitudenbegrenzung abfällt und nicht zusätzlich zu anderen regelungstechnischen Maßnahmen betrieben werden sollte. Insbesondere das Erzwingen von $Z_{Ro} = 0$ (z.B. durch ϑ_0) kombiniert mit den übrigen Verfahren ist ausgesprochen schädlich, da es mit der erfolgreichen Unterdrückung von F_0 im Widerspruch steht. Der sich bei einfacher Zustandsregelung ergebende Restschub ist dagegen aus flugmechanischer Sicht völlig unkritisch. Abschließend zeigt Bild 6.13 Zeitverläufe aus einer Simulation, bei der sowohl die F_0 -Kompensation über M , als auch die Regelung über G_β und G_γ verwendet wurde. Zusätzlich wurden die beiden Schaltschwellen der $\hat{E}_2(\psi)$ -Näherung einzeln optimiert, wobei sich in diesem Fall gerade $\hat{E}_2(\psi=0 \dots 180^\circ) = -2\hat{E}_2(\psi=180 \dots 360^\circ)$ ergab. Die Stellgeschwindigkeiten sind auf einen technisch gerade noch realisierbaren Wert von $\dot{\vartheta}_{St}^{\max} = \pm 200^\circ/\text{s}$ begrenzt. Aus konstruktiver Sicht kritisch mögen allein die erforderlichen negativen Einstellwinkel von bis zu $\vartheta_{St} = -22^\circ$ sein.

Die hier beschriebenen Erfahrungen finden eine gewisse Parallele in den Untersuchungen aus [105]. Dort geht es um die Erweiterung des Flugbereiches bei Hubschraubern mit hochbelasteten Rotoren. Als die Fluggeschwindigkeit begrenzend werden das Abreißen am rücklaufenden Blatt und das Auftreten großer Schlagamplituden infolge von Störungen beschrieben. Auch bei der Überwindung dieser Probleme erweisen sich die konventionellen Steuerungssysteme als ineffektiv. Der Autor schlägt daher einen Regler vor, bei dem der Schlagwinkel, aber auch Signale von im Blatt installierten Drucksensoren zurückgeführt werden. Ohne näher auf die physikalischen Zusammenhänge einzugehen, verwendet er eine fast rechteckförmige Schaltfunktion, die das Vorzeichen der Rückführverstärkungen umschaltet. Die Schaltwerte liegen also symmetrisch bei etwa ± 1 , hingegen sind die

Umschaltzeitpunkte nicht genau auf $\psi = 180^\circ$ und 360° festgelegt. Anhand von Meß-
schriften aus Windkanaluntersuchungen bei $\mu = 1.92$ und 2.55 wird die Wirksamkeit ei-
ner derartigen Regelung demonstriert.

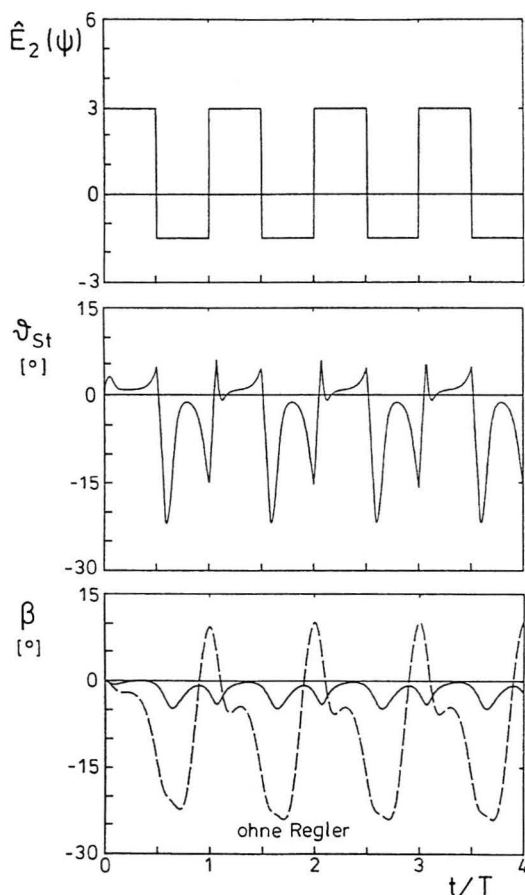


Bild 6.13 Zeitverläufe einer Simulation zur Amplitudenbegrenzung
($\mu = 2.5$, $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.1$, **rechte Seite:** F_0 , $G_\beta = 12.5$, $G_\beta = 10$ s,
 $\bar{\omega}_{\beta kt}^{nr} = 0.3$, $M/F_0 = -1$, $\dot{\vartheta}_{St}^{\max} = 200^\circ/\text{s}$)

7 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden grundlegende Fragen zur Stabilität von Stopp-Rotoren diskutiert. Da die Betriebsbedingungen während der Rotorstillsetzung von denen bei konventionellen Hubschraubern erheblich abweichen, waren die klassischen Modelle und Rechenverfahren nur bedingt anwendbar. Für die durchgeführten Untersuchungen mußten bekannte Methoden daher angepaßt oder erweitert werden.

Die wichtigste Voraussetzung zur realistischen Modellierung der Blattbewegungen bei hohen Fortschrittsgraden ist die Berücksichtigung der Rückanströmung. In Erweiterung der klassischen Blattelemententheorie wurde dazu für die Freiheitsgrade Schlagen, Schwenken und Torsion eine kompakte Formulierung vorgestellt, mit der sich die entscheidenden Effekte analytisch beschreiben lassen.

Ferner wurden verschiedene Methoden zur Behandlung periodischer Differentialgleichungen zusammengestellt und bezüglich ihrer Anwendbarkeit auf die hergeleiteten mathematischen Modelle untersucht. Dabei konnte gezeigt werden, daß sich der FLOQUET-Formalismus auch für Stabilitätsuntersuchungen an nichtlinearen Systemen effizient einsetzen läßt. Als problematischer erwies sich dagegen die Bestimmung der partikulären Lösungen. Wegen des Auftretens nicht zu vernachlässigender höherharmonischer Anteile sind einfache analytische Verfahren wie die harmonische Balance nicht geeignet.

Die Untersuchungen zur Stillsetzung betrafen zunächst die Schlagbewegung. Die größten Auswirkungen auf das Verhalten des Stopp-Rotors ergaben sich aus der Wahl der Blattanschlußsteifigkeit, während die übrigen konstruktiven Parameter vergleichsweise wenig Einfluß zeigten. Die Rechnungen anhand des linearen Modells ergaben als grobe Anhaltspunkte, daß

- die Schlagbewegung schon für Anschlußsteifigkeiten ab $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.10$ dynamisch stabil bleibt,
- statische Divergenz für alle Blattstellungen oberhalb von ca. $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.17$ ausgeschlossen ist,
- die Antwortamplituden der partikulären Lösungen jedoch erst bei Steifigkeiten von mehr als $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.20$ in technisch akzeptablen Grenzen bleiben.

Im Windkanal untersuchte Modellrotoren lagen mit ihren Schlagsteifigkeiten im Bereich von $\bar{\omega}_\beta^{nr} = 0.4$ (vgl. [11] und [30]), wobei die Beherrschung der großen resultierenden Blattanschlußmomente eines der wichtigsten Probleme darstellte. Daher erscheint die Verwendung kleinerer Werte als durchaus wünschenswert.

Das dynamische Verhalten von Stopp-Rotoren läßt sich weitgehend durch linearisierte Bewegungsgleichungen beschreiben. Erst wenn in den periodischen Lösungen unrealistisch große Amplituden auftreten, muß auf die nichtlinearen und damit wesentlich rechenzeintensiveren Modelle zurückgegriffen werden.

Durch schnelle Drehzahländerungen d.h. kurze Brems- bzw. Anfahrvorgänge lassen sich die auftretenden Schlagwinkelausschläge erheblich verringern, aus Sicherheitsgründen sollte die Rotorauslegung Stabilität für alle Rotordrehzahlen jedoch auch stationär gewährleisten.

In weiteren Rechnungen wurden die Wechselwirkungen mit den Blattfreiheitsgraden Torsion und Schwenken untersucht; dabei zeigte sich, daß die Kopplungen i.a. destabilisierend wirken. Bezüglich der Schlag-/Torsionsstabilität erwiesen sich Profilauslegungen als vorteilhaft, bei denen Schwerpunkt, elastische Achse und vorderer Luftangriffspunkt möglichst dicht beieinander liegen. Bei den üblichen Torsionssteifigkeiten von deutlich über $\bar{\omega}_\theta^{nr} = 2$ treten Stabilitätsprobleme infolge schädlicher Kopplungen mit der Schlagbewegung jedoch nicht mehr auf. Bei den Rechnungen zur gekoppelten Schlag-/Schwenkbewegung ergaben sich Nachteile für den schwenkweichen Rotor, aber auch in diesem Fall zeigten sich Stabilitätsprobleme erst bei unrealistisch großen Schlagamplituden.

Die abschließenden Betrachtungen zur Steuerung und Regelung der Blattbewegungen konnten zeigen, daß schon mit verhältnismäßig einfachen Konzepten deutliche Verbesserungen im Stabilitäts- und Antwortverhalten zu erzielen sind. Dabei erwies sich eine dem Problem angepaßte Variante des Individual Blade Control als sehr effektiv. Die sich daraus ergebenden Anforderungen an die Meßtechnik und an die Bandbreite der Aktuatoren lassen sich technisch schon heute erfüllen. Die klassischen Methoden der Rotorsteuerung oder auch die übliche Schubregelung können bei der Stillsetzung dagegen zu Problemen führen.

Da die Untersuchungen primär dem prinzipiellen Verständnis möglicher Instabilitäten dienen sollten, war es zulässig, verschiedene Vereinfachungen einzuführen. Nur so konnten die meisten Zusammenhänge noch analytisch formuliert und damit die erforderlichen Rechenzeiten begrenzt werden. Für eine konkrete Rotorauslegung müßten, aufbauend auf den hier gewonnenen Erkenntnissen, bestimmte kritische Fälle nachgerechnet und dabei die Modellierung stufenweise verfeinert werden. Zu den wichtigsten anzustrebenden Modellverbesserungen zählen:

- Übergang auf ein elastisches Blattmodell unter Berücksichtigung der Blattverformungen durch Luftkräfte. Die Ergebnisse zur Stabilität bei nachgeführten Ersatzgrößen (Kap. 4.3.2.2) deuten auf einen erheblichen Einfluß der Blatteigenformen.
- Modellierung der Luftkräfte durch radiale Geschwindigkeitskomponenten am Blatt. Gerade bei niedrigen Rotordrehzahlen ergeben sich für vordere und hintere Blattpositionen starke Querströmungen. In [29] wird z.B. gezeigt, daß auch bei $\psi = 180^\circ$ größere Blattbelastungen auftreten können.
- Berücksichtigung des induzierten Abwindes. Zumindest bei Stillsetzungsbeginn werden die mit den Blattbewegungen induzierten vertikalen Geschwindigkeiten die Anströmbedingungen für das jeweils folgende Rotorblatt beeinflussen.
- Einbeziehung von Interferenzeffekten zwischen Rotor und Flügel. Sofern sich der Rotor in unmittelbarer Nähe des aerodynamisch hoch belasteten Flügels befindet, wird es in der Rotorebene zu lokalen Strömungsbeeinflussungen und damit zu einer weiteren Anregung der Blattbewegungen kommen.

Betrachtet man die bei der Stillsetzung auftretenden reduzierten Frequenzen (STROUHAL-Zahlen), erscheint es zumindest bei Beschränkung auf Schlag- und Schwenkbewegung nicht als erforderlich, instationäre aerodynamische Effekte aufwendig zu modellieren (vgl. z.B. [51]). Die Eigenfrequenzen der Torsionsbewegung liegen dagegen deutlich höher als jene von Schlag- und Schwenkbewegung (und damit i.a. auch höher als in den Beispielfällen in dieser Arbeit). Dies ist durchaus wünschenswert (vgl. Kap. 5.1) und bei üblicher Blattausslegung sowie hinreichend steifem Steuergestänge auch problemlos zu gewährleisten. Damit können im Torsionsfreiheitsgrad aber Frequenzen auftreten, welche die Berücksichtigung instationärer aerodynamischer Ansätze erforderlich

werden lassen. Effekte wie Biege-/Torsions- oder Stall-Flattern lassen sich nur unter Einbeziehung derartiger Modelle hinreichend genau beschreiben, siehe z.B. [37] und [38].

Neben den Aspekten der Blattbewegungen sind bei der Stillsetzung aber insbesondere auch Schwingungsprobleme durch gekoppelte Rotor-/Zellen-Bewegungen sowie flugmechanische Fragestellungen von Bedeutung. So ist u.a. zu klären, welchen Einfluß die wechselnden, z.T. sehr großen Rotormastmomente auf die Flugeigenschaften der Transitionsphase nehmen. Die große Anzahl derart komplexer Fragestellungen ist mit verantwortlich dafür, daß trotz verschiedener Ansätze und Aktivitäten auf diesem Gebiet bis heute kein Stopp-Rotor-Flugzeug realisiert wurde.

8 Literatur

Stopp-Rotor (Kap. 1)

- [1] E. Kislí
J.V.R. Prasad
Y. Yillikci Conceptual Design of a Stopped Rotor with Flap Control, 18th European Rotorcraft Forum, Avignon 1992
- [2] E.A. Fradenburgh The Variable-Diameter Rotor - A key to High Performance Rotorcraft, Vertiflite March/April 1990
- [3] R. Sopher
J.E. Duh Prediction of Aeroelastic Response of a Model X-Wing Rotor, Journal of the American Helicopter Society, 4/1987
- [4] J.M. Drees Prepare for the 21st Century - The 1987 Alexander A. Nikolsky Lecture, Journal of the American Helicopter Society, 3/1987
- [5] J.D. Eisenberg
J.V. Bowles Folding Tilt Rotor Demonstrator Feasibility Study, Ames Research Center, Moffett Field, 1986
- [6] R.W. Prouty Want to stop a rotor in flight? Here's how, Rotor & Wing International, Nov. 1986
- [7] J.M. Drees Expanding Tilt Rotor Capabilities, 12th European Rotorcraft Forum, Paper No.13, Garmisch-Partenkirchen 1986
- [8] K.v. Gersdorff
K. Knobling Hubschrauber und Tragschrauber, Bernard & Graefe Verlag Koblenz, 1982
- [9] W.B. Peck
A.H. Schoen The Value of Various Technology Advances for Several V/STOL Configurations, 4th European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, Paper No.39, Stresa 1978
- [10] M. Kretz Stoppable and Stowable Jet-Flap Rotor Concept, 4th European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, Paper No.46, Stresa, Italy, 1978
- [11] H. Huber
H. Krafka Studies on Rotor and Flight Dynamics of a Horizontally Stoppable Hingeless Rotor Aircraft, 2nd European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, Paper No.38, Bückeburg 1976
- [12] M. Lecarme Test of a Convertible Aircraft Rotor in the Modane Large Wind Tunnel, 2nd European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, Paper No.37, Bückeburg 1976
- [13] H. Försching Dynamische und aeroelastische Probleme des Stop-Rotors und ihre analytische Behandlung, Teil II, AVA-FB 73-19, Institut für Aeroelastik, DFVLR Göttingen, 1973

- [14] H. Försching
G. Kotowski Dynamische und aeroelastische Probleme des Stop-Rotors und ihre analytische Behandlung, Teil I, AVA-FB 72-65, Institut für Aeroelastik, DFVLR Göttingen, 1972
- [15] M. Kretz Le Domaine d'Application du Rotor à Volets Fluides, 39th AGARD Flight Mechanics Panel, 1971
- [16] F.E. Tiller
R. Nicholson Stability and Control Considerations for a Tilt-Fold-Proprotor Aircraft, Journal of the American Helicopter Society 3/1971
- [17] H. Krafka
Sobetzko Aerodynamische Untersuchungen der Transition eines VSTOL-Flugzeuges mit Faltrotoren anhand von Windkanalmessungen, 1. und 2. Teilbericht, MBB München, Juli 1970
- [18] J.A. De Tore
T.M. Gaffey The Stopped-Rotor Variant of the Proprotor VTOL-Aircraft, Journal of the American Helicopter Society 3/1970
- [19] F.V. Engle
K.W. Sambell Performance Aspects of Folding Proprotor V/STOL Aircraft, 25th Annual National Forum Proceedings, Washington D.C., May 1969
- [20] R.P. White Instabilities Associated with a Rotor Blade Stopped in Flight, Journal of the American Helicopter Society 2/1969
- [21] L.H. Ludi Composite Aircraft Design, Journal of the American Helicopter Society 1/1968
- [22] W.H. Deckert
J.L. McCloud Considerations of the Stopped Rotor V/STOL Concept, Journal of the American Helicopter Society 1/1968
- [23] J.B. Wheatley
D.T. Sasaki Propulsion for Composite Aircraft, 31st PEP Meeting Ottawa, 1968
- [24] K.H. Hohenemser Remarks on Dynamic Problems of Composite Aircraft, Journal of the American Helicopter Society 1/1968
- [25] R.J. Huston
J.P. Shivers The Conversion of the Rotor/Wing Aircraft, AGARD Specialist Meeting on "Fluid Dynamics of Rotor and Fan Supported Aircraft at Subsonic Speeds", Göttingen 1967
- [26] P. Richter Windkanalversuche bei hohen Fortschrittsgraden, DLR Mitteilung 67-05, 1967
- [27] Ch. Fischer Übersicht über die verschiedenen Arten von Schnellhubschraubern, DLR Mitteilung 67-05, 1967
- [28] P.L. Michel Forschungsarbeiten über den Hochgeschwindigkeitshubschrauber und das Konzept des einziehbaren Rotors, DLR Mitteil. 67-05, 1967
- [29] R.W. Prouty
R.E. Donham Aerodynamic Considerations of Stopping a Rotor in Flight, American Helicopter Society, 23rd Annual National Forum Proceedings, Washington D.C. 1967

- [30] R.E. Donham Analysis of Stowed Rotor Aeroelastic Characteristics, Journal of
W.P. Harvick the American Helicopter Society 1/1967
- [31] G. Reichert Probleme des entlasteten Rotors, Bericht DF 49-Ö,
Böklow GmbH, Ottobrunn 1966
- [32] P.W. Theriault Considerations Relative to Stopping a Rotor in Forward Flight,
I.H. Culver American Helicopter Society, 21st Annual National Forum
L. Celnikier Proceedings, Washington D.C. 1965
- [33] W. Just Hubschrauber und Vertikalstartflugzeuge, Verlag Flugtechnik
Stuttgart, 1963

Hubschrauber allgemein

- [34] G. Reichert Schwingungserscheinungen bei Hubschraubern,
Lehrgangsumdruck F2.03 Nr.6, Carl-Cranz-Gesellschaft, 1988
- [35] U. Arnold Entwicklung eines Hubschrauber-Simulationsprogramms, DGLR-
Jahrbuch 1987 I, Vortrag 87-123, Berlin 1987
- [36] G. Reichert Flugmechanik der Drehflügler I und II, Vorlesungsumdruck, Institut
für Flugmechanik, Technische Universität Braunschweig, 1984
- [37] W. Johnson Helicopter Theory, Princeton University Press, 1980
- [38] A.R.S. Bramwell Helicopter Dynamics, Edward Arnold (Publishers) Ltd, London
1976
- [39] G. Reichert Basic Dynamics of Rotors; Control and Stability of Rotary Wing
Aircraft; Aerodynamics and Dynamics of Advanced Rotary-Wing
Configurations, AGARD Lecture Series No. 63 on Helicopter
Aerodynamics and Dynamics, 1973
- [40] W. Just Aerodynamik der Hub- und Tragschrauber Teil 2, Berechnung des
K. Jaeckel Rotors, Bericht 3, Deutsche Studiengemeinschaft Hubschrauber
e.V., Stuttgart-Flughafen, 1954

Modellierung der Blattbewegungen (Kap. 2)

- [41] P.P. Friedmann Helicopter Rotor Dynamics and Aeroelasticity: Some Key Ideas and Insights, Vertica 1/1990
- [42] P.P. Friedmann Rotary-Wing Aeroelasticity with Application to VTOL Vehicles, 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conference AIAA-90-1115, Long Beach 1990
- [43] I. Chopra Perspectives in Aeromechanical Stability of Helicopter Rotors, Vertica 4/1990
- [44] P.P. Friedmann Influence of Time Domain Unsteady Aerodynamics on Coupled
L.H. Robinson Flap- Lag- Torsional Aeroelastic Stability and Response of Rotor Blades, 2nd International Conference on Rotorcraft Basic Research, Maryland 1988
- [45] R. Sopher Effects of Analytical Modelling Assumptions on the Predicted
S.J. Cassarino Stability of a Model Hingeless Rotor, Journal of the American Helicopter Society 4/1988
- [46] M.A.H. Dinyavari Application of Time-Domain Unsteady Aerodynamics to Rotary-
P.P. Friedmann Wing Aeroelasticity, AIAA Journal 9/1986
- [47] H.C. Curtiss, Jr. Stability and Control Modelling, 12th European Rotorcraft Forum,
Paper No.41, Garmisch-Partenkirchen 1986
- [48] G.R. Neelakantan Feasibility of Simplifying Coupled Lag-Flap-Torsional Models for
G.H. Gaonkar Rotor Blade Stability in Forward Flight, 10th European Rotorcraft Forum, Paper 53, Den Haag 1984
- [49] D.A. Peters The Importance of Steady and Dynamic Inflow on the Stability of Rotor-Body Systems, Integrated Technology Rotor Methodology Assessment Workshop, NASA CP-10007, 1983
- [50] G. Bayer Zusammenstellung der Daten zur Ermittlung von Ersatzsystemen, Biege- und Torsionseigenfrequenzen für den BO 105-Serienrotor, TN-DE132-12/76, Messerschmitt-Bölkow-Blohm, 1976
- [51] H.W. Försching Grundlagen der Aeroelastik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
New York, 1974
- [52] G. Reichert Flugeigenschaften bei Hubschraubern mit elastisch angeschlossenen Rotorblättern, WGLR-Jahrbuch 1963, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1964
- [53] M. I. Young A Simplified Theory of Hingeless Rotors with Application to Tandem Helicopter, 18th Annual National Forum of the American Helicopter Society, 1962

Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, FLOQUET-Theorie (Kap. 3)

- [54] F. Tasker Nonlinear Damping Estimation from Rotor Stability Data Using
I. Chopra Time and Frequency Domain Techniques, AIAA Journal 5/1992

- [55] J. Ewald Untersuchungen zur aeromechanischen Instabilität eines
 Hubschraubers mit Hilfe der Floquet-Theorie, Zeitschrift für
 angewandte Mathematik und Mechanik, Volume 69 No. 5, 1989

- [56] D. Ottl Schwingungen mit Parametererregung und Totzeit,
 Vorlesungsmanuskript, Institut für Technische Mechanik,
 Technische Universität Braunschweig, 1987

- [57] E. Brommundt Nichtlineare Schwingungen, Vorlesungsumdruck, Institut für Tech-
 nische Mechanik, Technische Universität Braunschweig, 1987

- [58] J. Ewald Investigation of Ground and Air Resonance Using a Combination
 of Multiblade Coordinates and Floquet Theory, 12th European
 Rotorcraft Forum, Paper No.59, Garmisch-Partenkirchen 1986

- [59] J. Ewald An Application of Floquet Theory to Investigate Helicopter
 Mechanical Instability Using a Spatial Model Including Rotor Blade
 Flapping, 11th European Rotorcraft Forum, Paper No.63, London
 1985

- [60] N. Eicher Ein Iterationsverfahren zur Berechnung des Stabilitätsverhaltens
 zeitvarianter Systeme, VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11, Nr. 63,
 1984

- [61] J. Dugundij Some Analysis Methods for Rotating Systems with Periodic
H. Wendell Coefficients, AIAA-Journal 6/1983

- [62] J.A. Richards Analysis of Periodically Time-Varying Systems, Communications
 and Control Engineering Series, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
 New York, 1983

- [63] N. Eicher Einführung in die Berechnung parametererregter Schwingungen,
 Dokumentation Weiterbildung der Technischen Universität Berlin,
 Heft 1, 1981

- [64] G.H. Gaonkar On Computing Floquet Transition Matrices of Rotorcraft, Journal
D.S. Simha Prasad of the American Helicopter Society 3/1981
D. Sastry

- [65] C.E. Hammond An Application of Floquet Theory to Prediction of Mechanical
 Instability, Journal of the American Helicopter Society 4/1974

- [66] K.H. Hohenemser Some Applications of the Method of Multiblade Coordinates,
S.-K. Yin Journal of the American Helicopter Society 3/1973

- [67] M.A. Gockel Practical Solution of Linear Equations with Periodic Coefficients,
 Journal of the American Helicopter Society 1/1972

- [68] D.A. Peters Application of the Floquet Transition Matrix to Problems of Lifting
K.H. Hohenemser Rotor Stability, Journal of the American Helicopter Society 2/1971
- [69] L. Meirovitch Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill Book Company New
York
- [70] E. Höhn Über Stabilitätsgebiete Hillscher Differentialgleichungen,
Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1965
- [71] J. Staudhammer On the Stability Regions of Periodic Coefficient Differential
Equations, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,
Band 43, 1963
- [72] K. Klotter Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen
G. Kotowski mit drei unabhängigen Parametern, Zeitschrift für angewandte
Mathematik und Mechanik, Band 23, 3/1943
- [73] G. Kotowski Lösungen der inhomogenen Mathieschen Differentialgleichung
mit periodischer Störfunktion beliebiger Frequenz, Zeitschrift für
angewandte Mathematik und Mechanik, Band 23, 4/1943
- [74] M.J.O. Strutt Lamésche-, Mathiesche- und verwandte Funktionen in Physik
und Technik, Verlag Julius Springer Berlin, 1932
- [75] E.L. Ince Tables of the Elliptic-Cylinder Functions, Proceedings of the Royal
Society of Edinburgh Vol.52, 1932

Stabilität der Schlagbewegung (Kap. 4)

- [76] U. Arnold Blade Instability of Horizontally Stoppable Rotors, 17th European
Rotorcraft Forum, Paper No.55, Berlin 1991
- [77] S.J. Newman A Theoretical Model for Predicting the Blade Sailing Behaviour of
a Semi-Rigid Rotor Helicopter, Vertica 4/1990
- [78] J.G. Biggers Some Approximations to the Flapping Stability of Helicopter
Rotors, Journal of the American Helicopter Society 4/1974
- [79] W. Johnson A Perturbation Solution of Helicopter Rotor Flapping Stability,
Journal of Aircraft 5/1973
- [80] H. Strehlow Untersuchung aeroelastischer Probleme von Drehflüglern,
H. Habsch MBB-Bericht-Nr. UD TNA D12-31/70, Ottobrunn 1970
- [81] T.M. Gaffey The Effect of Positive (Negative δ_z) on Rotor Blade Motion Stability
and Flapping, Journal of the American Helicopter Society 2/1969
- [82] G.J. Sissingh Dynamics of Rotors Operating at High Advance Ratios, Journal of
the American Helicopter Society 3/1968

Gekoppelte Blattbewegungen (Kap. 5)

- [83] J. Ewald Untersuchungen zur aeromechanischen Stabilität des Hubschraubers, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1991

- [84] G. Reichert Helicopter Ground and Air Resonance Dynamics, 14th European Rotorcraft Forum, Paper No.43, Milano 1988
- J. Ewald

- [85] R.L. Bielawa Notes Regarding Fundamental Understanding of Rotorcraft Aeroelastic Instability, Journal of the American Helicopter Society 4/1987

- [86] B. Panda Flap-Lag-Torsion Stability in Forward Flight, Journal of the American Helicopter Society 4/1985
- I. Chopra

- [87] R.A. Ormiston Investigations of Hingeless Rotor Stability, Vertica 2/1983

- [88] D.A. Peters Flap-Lag Stability of Helicopter Rotor Blades in Forward Flight, Journal of the American Helicopter Society 4/1975

- [89] R.A. Ormiston A Study of Stall-Induced Flap-Lag Instability of Hingeless Rotors, Journal of the American Helicopter Society 1/1975
- W.G. Bousman

- [90] H. Strehlow Weiterentwicklung von aeroelastischen Verfahren für Hochleistungsflugzeuge und Drehflügler, Teil A, MBB-Bericht-Nr. UD-112-73, Ottobrunn 1973
- H. Habsch
- H. Huber

- [91] H. Strehlow Weiterentwicklung aeroelastischer Rechenverfahren für Blattinstabilitätsuntersuchungen von Rotoren im Schnellflug, MBB-Bericht-Nr. UD-91-72, Ottobrunn 1972
- H. Habsch

- [92] G.J. Sissingh Investigations on the Effect of Blade Torsion on the Dynamics of the Flapping Motion, Journal of the American Helicopter Society 2/1970
- W.A. Kuczynski

- [93] R.G. Loewy Review of Rotary-Wing V/STOL Dynamic and Aeroelastic Problems, VTOL Research, Design and Operations Meeting, AIAA/AHS, Atlanta 1969

Regelung der Blattbewegungen (Kap. 6)

- [94] A. Bastian Stabilisierung der Schlagbewegung durch aktive Steuerung bei der Stillsetzung von Stopp-Rotoren, Diplomarbeit 92-2D, Institut für Flugmechanik, Technische Universität Braunschweig, 1992 (unveröffentlicht)
- [95] O. Föllinger Nichtlineare Regelungen I und II, R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1991
- [96] I. Machatzke Die Berücksichtigung des Trimmzustandes bei Untersuchungen zur Rotorstillsetzung im Fluge, Diplomarbeit 91-11D, Institut für Flugmechanik, Technische Universität Braunschweig, 1991 (unveröffentlicht)
- [97] G. Reichert
U. Arnold Active Control of Helicopter Ground and Air Resonance, 16th European Rotorcraft Forum, Paper No.III.6.2, Glasgow 1990
- [98] M. Kretz Active Expansion of Helicopter Flight Envelope, 15th European Rotorcraft Forum, Paper No.53, Amsterdam 1989
- [99] G. Lehmann Untersuchungen zur höherharmonischen Rotorblattsteuerung bei Hubschraubern, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1987
- [100] F.K. Straub Optimal Control of Helicopter Aeromechanical Stability, Vertica 3/1987
- [101] N.D. Ham Helicopter Individual-Blade-Control Research at MIT 1977-1985, Vertica 1/2/1987
- [102] R.A. Calico
W.E. Wiesel Stabilization of Helicopter Blade Flapping, Journal of the American Helicopter Society 4/1986
- [103] R.A. Calico
W.E. Wiesel Control of Time-Periodic Systems, Journal of Guidance and Control 6/1984
- [104] N.D. Ham A Simple System for Helicopter Individual-Blade-Control Using Modal Decomposition, Vertica 1/1980
- [105] M. Kretz Relaxation of Rotor Limitations by Feedback Control, 33rd Annual Forum of the American Helicopter Society, Washington D.C. 1977
- [106] F.J. McHugh
R.B. Taylor The Reverse-Velocity Rotor - 300 Knots Plus Hover Capability, AHS-Symposium on Rotor Technology, Washington D.C. 1976
- [107] G. Reichert
B. Mühlig-Versen Steuerungs- und Regelungsprobleme bei Drehflüglern mit entlasteten Rotoren, Bericht DF 40, Bölkow GmbH, Ottobrunn 1966

A Anhang

A.1 Referenzdaten

Blätter:

Anzahl der Blätter	z	=	4
fikt. Schlaggelenkabstand	a/R	=	0.13
aerodyn. Blattanfang	A	=	0.25
aerodyn. Blattende	B	=	1.00
Blattiefe	l_{Bl}	=	0.30 m
Blattmassenbelegung	\bar{m}	=	7.5 kg/m
Nickträgheitsmoment um S	J_{SS}^{ss}	=	0.14 kgm ²
Abst. Profilschw.pkt.-elast. Achse	y_S	=	0.0 m
Abst. Luftangriffspkt.-elast. Achse	y_{L1}	=	0.0 m
Auftriebsanstieg	C_{aa}	=	6.25
Profilwiderstand	C_{w0}	=	0.01
Blattmassenkonstante	γ	=	3.5

Rotor:

Rotorradius	R	=	5.00 m
Flächendichte	$\frac{z l_{Bl}}{\pi R}$	=	8%
Rotorträgheitsmoment	J_{Ro}	=	1300 kgm ²

Fluggerät:

Gesamtmasse	m	=	9600 kg
max. Triebwerksleistung	P_{TW}^{max}	=	2 · 1580 kW
max. Antriebsdrehmoment	Q_{TW}^{max}	=	31600 Nm
Flügelfläche	S_{Fl}	=	40 m ²
Auftriebsanstieg Flügel/Rumpf	C_{Aa}	=	5.4
Nullwiderstand Flügel/Rumpf	C_{w0}	=	0.05
quadr. Widerstandsanstieg	k	=	0.05
Kreisflächenbelastung	$\frac{mg}{2\pi R^2}$	=	600 N/m ²
Flächenbelastung	$\frac{mg}{S_{Fl}}$	=	2350 N/m ²

Flugzustand:

Rotorenndrehzahl	Ω_{nenn}	=	50 1/s
Transitionschwindigkeit	V	=	50 m/s
Luftichte	ρ	=	1.225 kg/m ³
Schallgeschwindigkeit	a_{Schall}	=	340 m/s
Erdbeschleunigung	g	=	9.81 m/s ²
erford. Schwebeflugleistung	P_s^{erf}	=	2 · 1050 kW

A.2 Koordinatensysteme

nichtdrehendes Rotorsystem, x_{Ro}, y_{Ro}, z_{Ro} [m]
 Ursprung im Rotormittelpunkt C,
 z_{Ro} -Achse in Rotorachse pos. nach unten

⇓ **neg. Drehung der z_{Ro} -Achse um ψ**

mitdrehendes Rotorsystem, x_{H1}, y_{H1}, z_{H1} [m]
 Ursprung im Rotormittelpunkt C,
 x_{H1} -Achse in Blatthalsrichtung

⇓ **Verschiebung in x_{H1} -Richtung um a**

Rotorkopfsystem, x_{H2}, y_{H2}, z_{H2} [m]
 Ursprung im Blattgelenk P,
 x_{H2} -Achse in Blatthalsrichtung

⇓ **pos. Drehung der z_{H2} -Achse um ζ**

Schwenkgelenksystem, $x_{\zeta}, y_{\zeta}, z_{\zeta}$ [m]
 Ursprung im Blattgelenk P,
 z_{ζ} -Achse in der Schwenkgelenkachse

⇓ **pos. Drehung der y_{ζ} -Achse um β**

Schlaggelenksystem, $x_{\beta}, y_{\beta}, z_{\beta}$ [m]
 Ursprung im Blattgelenk P,
 y_{β} -Achse in der Schlaggelenkachse

⇓ **pos. Drehung der x_{β} -Achse um $\vartheta = \vartheta_{St} + \Theta + \vartheta_P$**

Blattprofilsystem, x_p, y_p, z_p [m]
 Ursprung im Blattgelenk P,
 x_p -Achse in der "elastischen Achse",
 y_p -Achse in Richtung der örtlichen Profillehne

in den linearisierten Modellen $r-a, y$ [m]
 verwendete Blattkoordinaten (Lage
 und Orientierung wie beim p -System)

in den linearisierten Modellen $x - a/R, y/l_{Bl}$ [-]
 verwendete dimensionslose
 Blattkoordinaten (Lage und
 Orientierung wie beim p -System)

A.3 Transformationen

$$\underline{\underline{M}}_{\equiv RoH1} = \begin{pmatrix} -\cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\underline{\underline{M}}_{\equiv H1H2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\underline{\underline{M}}_{\equiv H2\zeta} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\underline{\underline{M}}_{\equiv \beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{\underline{M}}_{\equiv \beta p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A.4 Blattmasse und Trägheitsmomente

Blattmasse:

$$\bar{m} = dm/dr = \text{const.} \quad m_{Bl} = (R - a)\bar{m} \quad (\text{A.6})$$

Blatträgheitsmomente:

	Schlagen	Schwenken	Torsion
statische Momente	$S^P = \int_{m_{Bl}} (r - a) dm$		$S^S = \int_{m_{Bl}} (y - y_s) dm = 0$
			$S^E = \int_{m_{Bl}} y dm = y_s m_{Bl}$
			$S^C = \int_{m_{Bl}} r dm$
Trägheitsmomente	$J^{PP} = \int_{m_{Bl}} (r - a)^2 dm$		$J^{SS} = \int_{m_{Bl}} (y - y_s)^2 dm$
	$J^{CC} = \int_{m_{Bl}} r^2 dm$		$J^{EE} = \int_{m_{Bl}} y^2 dm = J^{SS} + y_s^2 m_{Bl}$
gemischte Momente	$J^{CP} = \int_{m_{Bl}} r(r - a) dm$	$J^{2P} = \int_{m_{Bl}} a(r - a) dm = a S^P$	$J^{EP} = \int_{m_{Bl}} y(r - a) dm = y_s S^P$
			$J^{EC} = \int_{m_{Bl}} y r dm = y_s S^C$

(A.7)

A.5 Gleichungen der isolierten Schlagbewegung

Differentialgleichung:

$$\beta'' + \gamma D(\psi) \beta' + \left[\gamma K(\psi) + K_0 \right] \beta = \gamma \left[E_1(\psi) \vartheta_1 + E_2(\psi) \vartheta_{Sr} + E_3(\psi) \delta \right] + F_0 \quad (\text{A.8})$$

periodische Koeffizienten:

ohne Rückanströmung	unter Berücks. d. Rückanströmung
$D(\psi) = (C_4 - \frac{a}{R} C_3) + (C_3 - \frac{a}{R} C_2) \mu \sin \psi$	$= C_4^R - \frac{a}{R} C_3^R$
$K(\psi) = C_3 \mu \cos \psi + C_2 \mu^2 \cos \psi \sin \psi$	$= C_3^R \mu \cos \psi$
$E_1(\psi) = C_5 + 2C_4 \mu \sin \psi + C_3 \mu^2 \sin^2 \psi$	$= C_5^R + C_4^R \mu \sin \psi \quad (\text{A.9})$
$E_2(\psi) = C_4 + 2C_3 \mu \sin \psi + C_2 \mu^2 \sin^2 \psi$	$= C_4^R + C_3^R \mu \sin \psi$
$E_3(\psi) = C_3 + C_2 \mu \sin \psi$	$= C_3^R$

Abkürzungen:

$$C_n = D_n - \frac{a}{R} D_{n-1} \qquad C_n^R = D_n^R - \frac{a}{R} D_{n-1}^R \quad (\text{A.10})$$

Blattintegrale:

$$D_n = \int_A^B x^{n-1} dx \qquad D_n^R(\psi) = \int_A^B x^{n-2} |x + \mu \sin \psi| dx \quad (\text{A.11})$$

konstante Koeffizienten:

$$K_0 = \frac{J^{CP}}{J^{PP}} + \left[\frac{\bar{\omega}_\beta^{nr}}{\Omega} \right]^2 \quad (\text{A.12})$$

$$F_0 = -\frac{S^P}{J^{PP}} \frac{g}{\Omega^2} \quad (\text{A.13})$$

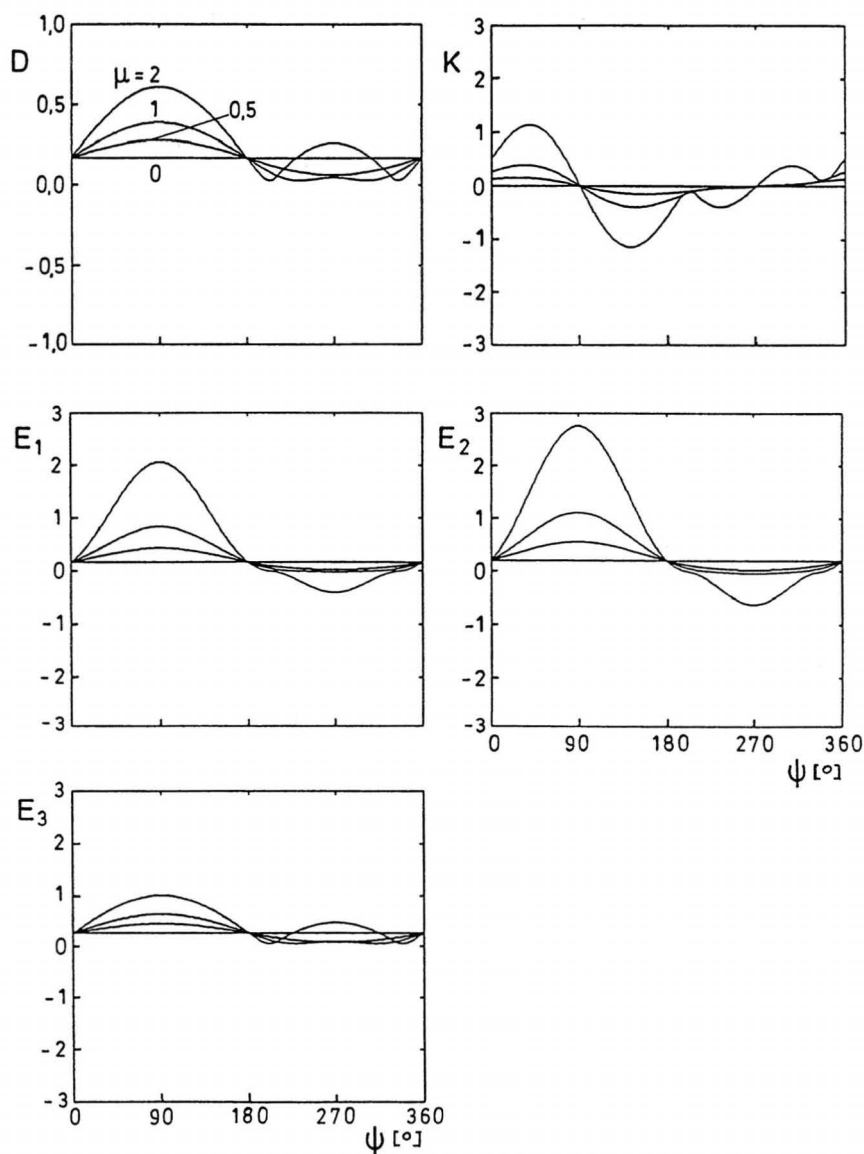


Bild A.1 Periodische Koeffizienten der Schlagdifferentialgleichung unter Berücksichtigung der Rückanströmung

A.6 Gleichungen der gekoppelten Schlag-/Torsionsbewegung

Differentialgleichungssystem:

$$\underline{\underline{J}}\underline{\underline{\chi}}'' + \text{diag } \underline{\underline{\gamma}}\underline{\underline{D}}(\psi)\underline{\underline{\chi}}' + \left[\text{diag } \underline{\underline{\gamma}}\underline{\underline{K}}(\psi) + \underline{\underline{K}}_0 \right] \underline{\underline{\chi}} = \left[\text{diag } \underline{\underline{\gamma}}\underline{\underline{E}}(\psi) + \underline{\underline{E}}_0 \right] \underline{\underline{\vartheta}} + \underline{\underline{F}}_0 \quad (\text{A.14})$$

Vektor der Freiheitsgrade:

$$\underline{\underline{\chi}} = \begin{bmatrix} \beta \\ \Theta \end{bmatrix}$$

Steuergrößenvektor:

$$\underline{\underline{\vartheta}} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_{St} \\ \vartheta'_{St} \\ \vartheta''_{St} \\ \delta \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Massenmatrix:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{J^{PE}}{J^{PP}} \\ -\frac{J^{PE}}{J^{EE}} & 1 \end{bmatrix}$$

Blattmassenkonstanten:

$$\underline{\underline{\gamma}} = \begin{bmatrix} \gamma_\beta \\ \gamma_\Theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

periodische Koeffizienten:

$$\underline{\underline{D}}(\psi) = \begin{bmatrix} C_4^R - \frac{a}{R}C_3^R & 0 \\ -G_3 + \frac{a}{R}G_2 + C_2^R\mu \sin \psi & \frac{i_{Bl}}{R}(G_2 + 2D_2 + D_1\mu \sin \psi)\bar{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\underline{\underline{K}}(\psi) = \begin{bmatrix} C_3^R\mu \cos \psi & -C_4^R - C_3^R\mu \sin \psi \\ -G_2\mu \cos \psi + D_1\mu^2 \sin \psi \cos \psi & G_3 - (D_2 - G_2)\mu \sin \psi - D_1\mu^2 \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\underline{\underline{E}}(\psi) = \begin{bmatrix} C_5^R + C_4^R\mu \sin \psi & C_4^R + C_3^R\mu \sin \psi \\ -G_4 + (D_3 - G_3)\mu \sin \psi + D_2\mu^2 \sin^2 \psi & -G_3 + (D_2 - G_2)\mu \sin \psi + D_1\mu^2 \sin^2 \psi \\ 0 & 0 & C_3^R \\ -\frac{i_{Bl}}{R}(G_2 + 2D_2 + D_1\mu \sin \psi)\bar{y} & 0 & -G_2 + D_1\mu \sin \psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Abkürzung:

$$G_n(\psi) = 4\bar{y}D_n^R - D_n \quad (\text{A.20})$$

konstante Koeffizienten:

$$\underline{K}_0 = \begin{pmatrix} \frac{j_{CP}}{j_{PP}} + \left[\frac{\bar{\omega}_{\beta}^{nr}}{\bar{\Omega}} \right]^2 & -\frac{j_{EC}}{j_{PP}} \\ -\frac{j_{EC}}{j_{EE}} & 1 + \frac{j_{SS}}{j_{EE}} \left[\frac{\bar{\omega}_{\Theta}^{nr}}{\bar{\Omega}} \right]^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\underline{E}_0 = \begin{pmatrix} \frac{y_S j_{CC}}{R j_{PP}} & \frac{j_{EC}}{j_{PP}} & 0 & \frac{j_{EP}}{j_{PP}} & 0 \\ -\frac{y_S j_{EC}}{R j_{EE}} & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\underline{F}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{s^P}{j_{PP}} \frac{g}{\Omega^2} \\ \frac{s^E}{j_{EE}} \frac{g}{\Omega^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

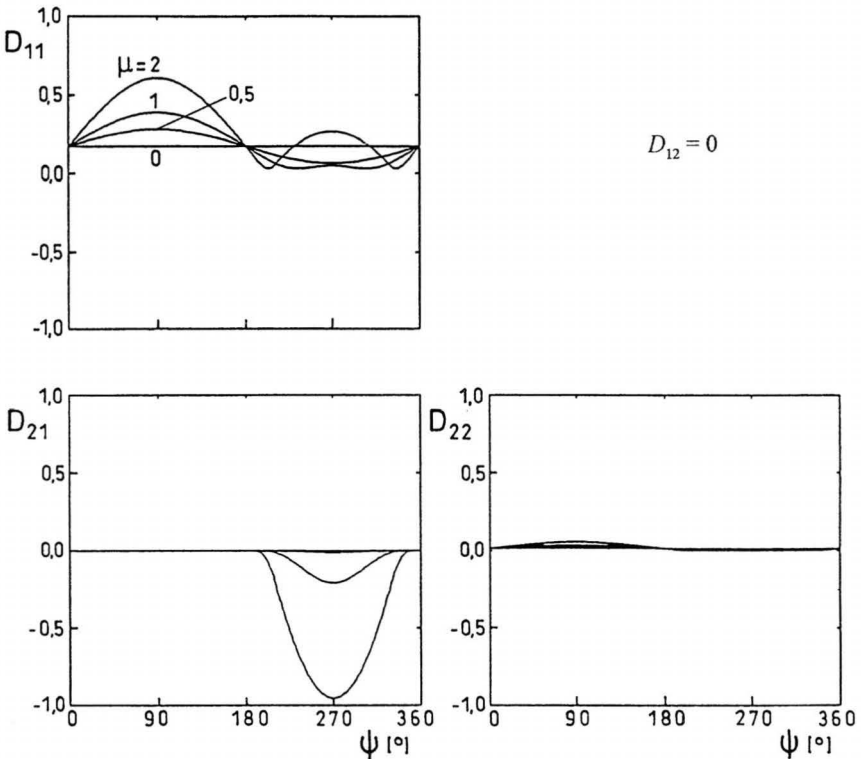


Bild A.2 Periodische Dämpfungskoeffizienten der Schlag-/Torsions-Differentialgleichung ($\dot{v}_{L1} = 0$)

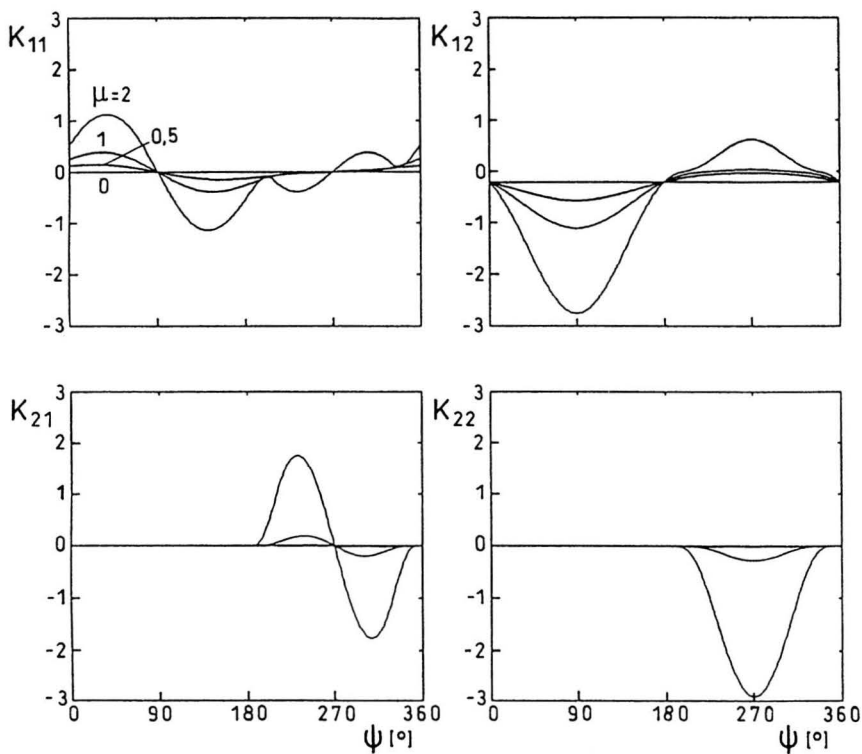
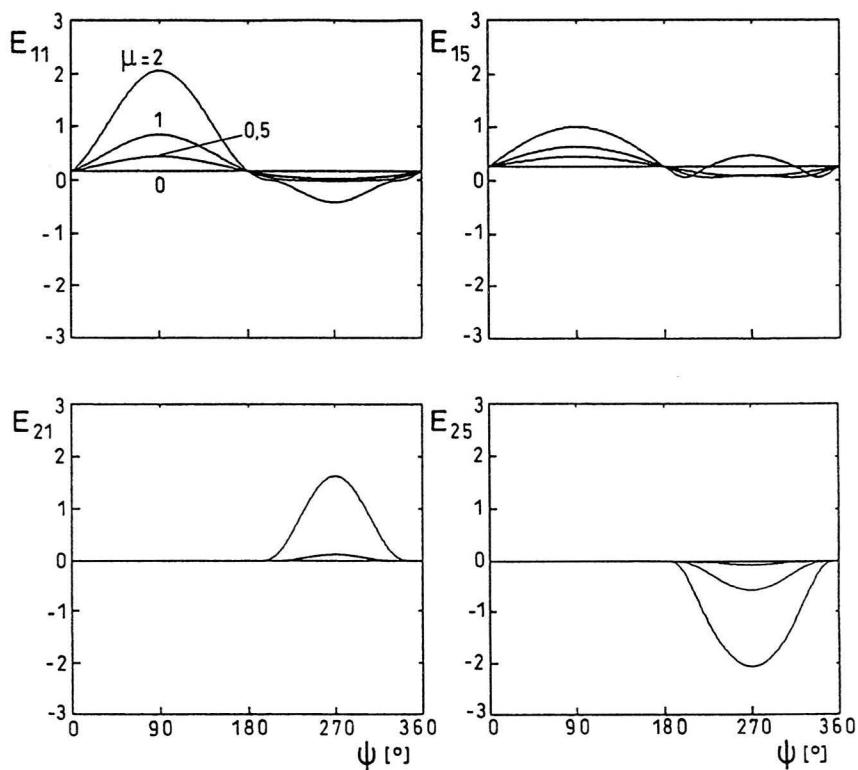


Bild A.3 Periodische Steifigkeitskoeffizienten der Schlag-/Torsions-Differentialgleichung ($v_{L1} = 0$)



$$\begin{aligned}
 E_{12} &= -K_{12} & E_{13} &= 0 & E_{14} &= 0 \\
 E_{22} &= -K_{22} & E_{23} &= -D_{22} & E_{24} &= 0
 \end{aligned}$$

Bild A.4 Periodische Koeffizienten der Störfunktion der Schlag-/Torsions-Differentialgleichung ($v_{L1} = 0$)

A.7 Gleichungen der gekoppelten Schlag-/Schwenkbewegung

nichtlineares Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{x}} + \left[\text{diag } \underline{\gamma D}(\psi) + 2\underline{D}_0 \right] \underline{\dot{x}} + \left[\text{diag } \underline{\gamma K}(\psi) + \underline{K}_0 \right] \underline{x} + 2(\underline{e}^T \cdot \underline{x}) \underline{Q} \underline{\dot{x}} = \\ = \left[\text{diag } \underline{\gamma E}(\psi) + \underline{E}_g(\psi) \right] \underline{\dot{\vartheta}} + \text{diag } \underline{\gamma F}(\psi) + \underline{F}_0 \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

linearisiertes homogenes Differentialgleichungssystem:

$$\underline{\ddot{x}} + \left[\text{diag } \underline{\gamma D}(\psi) + 2\underline{D}_Q(\psi) + 2\underline{D}_0 \right] \underline{\dot{x}} + \left[\text{diag } \underline{\gamma K}(\psi) + 2\underline{K}_Q(\psi) + \underline{K}_0 \right] \underline{x} = \underline{0} \quad (\text{A.25})$$

Vektor der Freiheitsgrade:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

Steuergrößenvektor:

$$\underline{\vartheta} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_{St} \\ \delta \\ \alpha_{Ro} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Blattmassenkonstanten:

$$\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_\beta \\ \gamma_\zeta \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

periodische Koeffizienten:

$$\underline{D}(\psi) = \begin{bmatrix} C_4^R - \frac{a}{R} C_3^R & 0 \\ 0 & 2(C_4^R - \frac{a}{R} C_3^R) \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\underline{D}_Q(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_{part} \\ \beta_{part} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\underline{K}(\psi) = \begin{bmatrix} C_3^R \mu \cos \psi & 0 \\ 0 & 2C_3^R \mu \cos \psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$\underline{K}_Q(\psi) = \begin{bmatrix} -\zeta'_{part} & 0 \\ \beta'_{part} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\underline{E}(\psi) = \begin{bmatrix} C_5^R + C_4^R \mu \sin \psi & C_4^R + C_3^R \mu \sin \psi & C_3^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$\underline{\underline{E}}_g(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S^P}{J^{PP}} \frac{g}{\Omega^2} \sin \psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$\underline{\underline{F}}(\psi) = \begin{bmatrix} 0 \\ C_4^R + C_3^R \mu \sin \psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

konstante Koeffizienten:

$$\underline{\underline{D}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{0\zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$\underline{\underline{K}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{J^{CP}}{J^{PP}} + \left[\frac{\bar{\omega}_\beta^{nr}}{\Omega} \right]^2 & 0 \\ 0 & \frac{J^{QP}}{J^{PP}} + \left[\frac{\bar{\omega}_\zeta^{nr}}{\Omega} \right]^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$\underline{\underline{F}}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{S^P}{J^{PP}} \frac{g}{\Omega^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

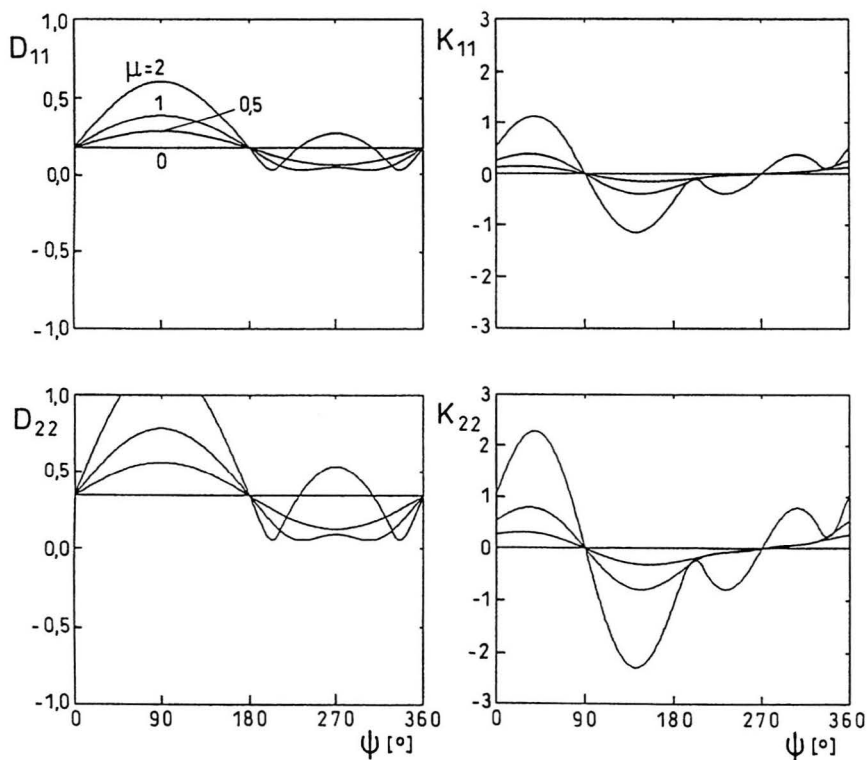
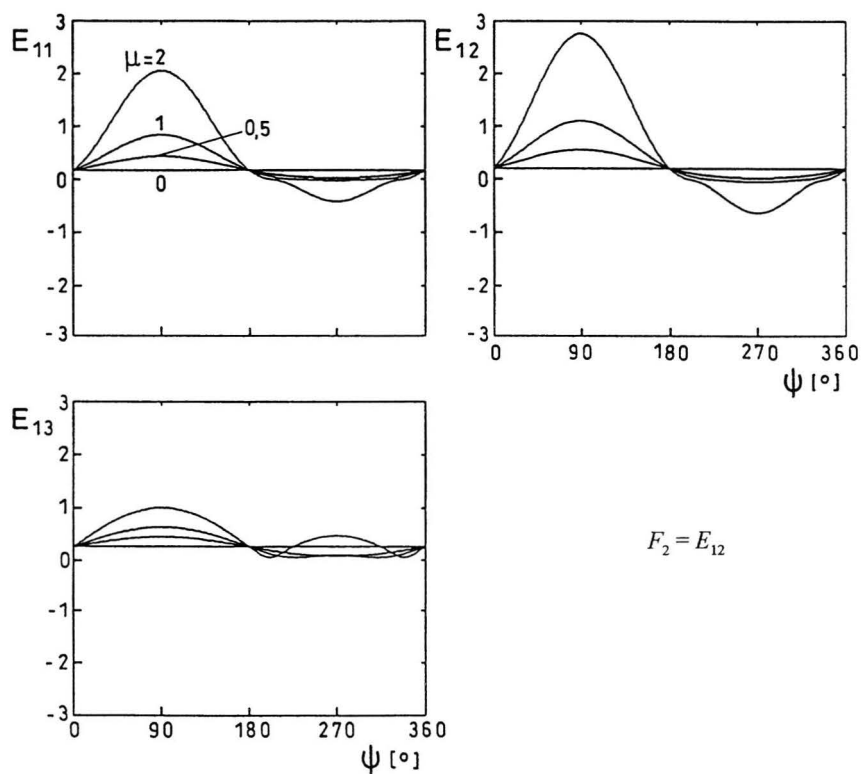


Bild A.5 Periodische Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten der Schlag-/Schwenk-Differentialgleichung



$$F_2 = E_{12}$$

Bild A.6 Periodische Koeffizienten der rechten Seite der Schlag-/Schwenk-Differentialgleichung

A.8 Stabilitätsuntersuchung konstanter und periodischer Systeme

	konstante Koeffizienten	periodische Koeffizienten
DGL-System	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t)$	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t)$ mit $\underline{A}(t+T) = \underline{A}(t)$
Lösung	$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}(t_0)$	$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{x}(t_0)$ mit: $\underline{\Phi}(t_0) = \underline{E}$
Transitions- matrix	$\underline{\Phi}(t) = e^{(t-t_0)\underline{A}}$ $= \underline{P} \text{diag} [e^{\lambda_i(t-t_0)}] \underline{P}^{-1}$	$\underline{\Phi}(t) = \underline{Z}(t)e^{(t-t_0)\underline{A}}$ mit: $\underline{Z}(t+T) = \underline{Z}(t)$ $= \underline{Z}(t)\underline{P} \text{diag} [e^{\lambda_i(t-t_0)}] \underline{P}^{-1}$
zugeh. Syst. mit konst. Koeffizienten		$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{R}\underline{y}(t)$ $\underline{R} = \frac{1}{T} \ln \underline{\Phi}_* = \underline{P} \text{diag} [\lambda_i] \underline{P}^{-1}$ $\lambda_i = \frac{1}{T} \ln \mu_i$
Monodromie- Matrix		$\underline{\Phi}_* = \underline{\Phi}(t_0 + T) = \underline{P} \text{diag} [\mu_i] \underline{P}^{-1}$
Eigenwert- problem	$\underline{A}\underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i$	$\underline{R}\underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i$ mit: $\underline{P} = (\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots)$ $\underline{\Phi}_* \underline{p}_i = \mu_i \underline{p}_i$
Stabilitäts- kriterium	alle $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ (für einfache λ_i)	alle $ \mu_i < 1$ (für einfache μ_i)

(A.39)

A.9 Profilbeiwerte für numerisches Aerodynamikmodell

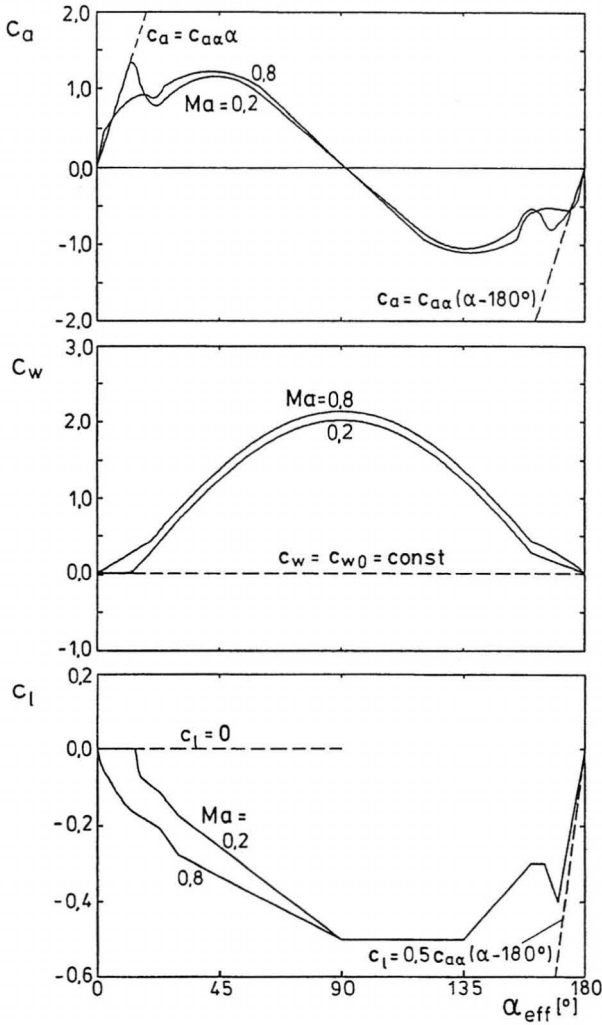


Bild A.7 Profilbeiwerte in Abhängigkeit von Anstellwinkel und MACH-Zahl (lineare Näherungen gestrichelt)

A.10 Das Rechenprogramm ARNCON

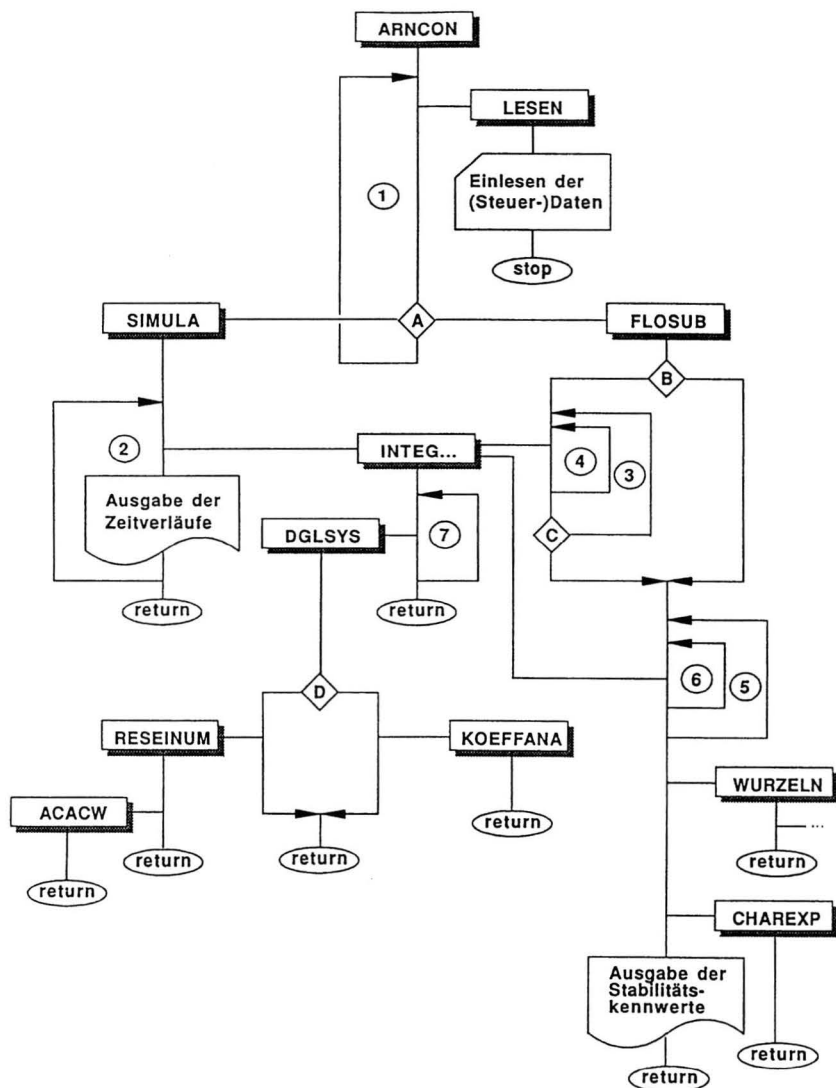


Bild A.8 Übersichtsflußdiagramm des Simulations- und Stabilitätsrechenprogramms ARNCON

(Legende zu Bild A.8)

- ① Schleife über die gewählten Rechenfälle
(z.B. μ -Variation)
- ② Schleife über die gewünschte Anzahl an Integrationsschritten
bei numerischer Simulation
- ③ Schleife über die erford.Anzahl an Rotorumläufen zur Ermittlung
der period. part. Lösung
- ④ Schleife zur num.Integration über einen Rotorumlauf
(bei Ω/m - subharm. Anteilen über m Umläufe)
- ⑤ Schleife über die jew. Anzahl an Spalten der
Transitionsmatrix
- ⑥ Schleife zur num.Integration der Transitionsmatrix beginnend
mit den jew. um "1" bzw. ε gestörten Systemzuständen
- ⑦ Schleife über die je nach Integrationsverf. erford. Anzahl
an Berechnungen der 1.Ableitung des Zustandsvektors

- ◊ A Auswahl zwischen num.Simulation und Stabilitätsrechnung
- ◊ B Auswahl zwischen klass. und mod. FLOQUET Verfahren
- ◊ C Abbruch, sobald Lösung periodisch
- ◊ D Auswahl zwischen nichtlin. und linearem Aerodynamikmodell

Lebenslauf

Daten zur Person:

21.02.1963	Uwe T. P. Arnold	geboren in Berlin, ledig
------------	------------------	--------------------------

Schulbildung:

08.09.1969 bis 14.07.1973	Till-Eulenspiegel- Grundschule, Berlin
------------------------------	---

21.08.1973 bis 22.06.1981	Canisius Kolleg, Berlin	privates, humanistisches Jesuitengymnasium Abschluß: Abitur
------------------------------	----------------------------	--

Studium:

01.10.1981 bis 31.03.1988	Technische Universität Braunschweig	Studium des Maschinenbaus, Fachrichtung: Luft- und Raumfahrttechnik, Schwerpunkt: Flugmechanik, Abschluß: Diplom
------------------------------	---	--

Berufstätigkeit:

15.04.1988 bis 28.02.1993	Institut für Flugmechanik der TU Braunschweig	Wissenschaftlicher Mitarbeiter, zunächst im Sonderforschungsbereich 212: "Sicherheit im Luftverkehr", später auf Instituts-Planstelle: Vorlesungsbetreuung, Forschungstätigkeit auf dem Gebiet der Hubschrauber-Flugmechanik
------------------------------	---	--

01.10.1993 bis 30.04.1994	Institut für Flugmechanik der TU Braunschweig	Schulung von Ingenieuren eines ausländischen Luftfahrtunternehmens
------------------------------	---	---

ISBN 3-928628-16-X